Lösungen zur Vorrundenprüfung 2005

Zuerst einige Bemerkungen zum Punkteschema. Eine vollständige und korrekte Lösung einer Aufgabe ist jeweils 7 Punkte wert. Für komplette Lösungen mit kleineren Fehlern oder Ungenauigkeiten, die aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Richtigkeit der dargestellten Lösung haben, geben wir 6 Punkte. Bei unvollständigen Lösungen wird der Fortschritt und der Erkenntnisgewinn bewertet (Teilpunkte). Oft gibt es mehrere Lösungen für ein Problem. Versucht jemand zum Beispiel eine Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen zu lösen, erreicht auf dem ersten Weg 3 Punkte, auf dem zweiten 2 Punkte, dann wird seine Punktzahl nicht 5, sondern 3 sein. Punkte, die auf verschiedenen Wegen erreicht werden, sind also *nicht* kummulierbar. Die unten angegebenen Bewertungsschemen sind nur Orientierungshilfe. Gibt jemand eine alternative Lösung, dann werden wir versuchen, die Punktzahl entsprechend zu wählen, dass für gleiche Leistung gleich viele Punkte verteilt werden. Die Schemen sind stets wie folgt zu interpretieren:
Kommt jemand in seiner Lösung bis und mit hierhin, dann gibt das soviele Punkte.
Ausnahmen von dieser Regel sind jeweils ausdrücklich deklariert.

1. Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $|AD| \leq |AB|$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke AD und N der Mittelpunkt der Strecke BC. Der Punkt E sei die Projektion von B auf die Gerade CM.

(a) Zeige, dass $ANEM$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

(b) Zeige, dass die Fläche des Vierecks $ABNE$ halb so gross ist, wie die Fläche von $ABCD$.

Lösung:

Wegen $|AD| \leq |AB|$ liegt der Punkt E im Innern des Rechtecks $ABCD$.

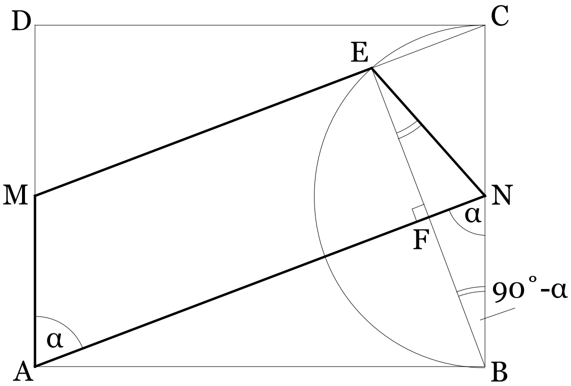
(a) Da die Strecke AN durch eine Translation um den Vektor $\overrightarrow{AM}$ in MC übergeht, sind AN und ME parallel. Zu zeigen ist noch $\sphericalangle MAN = \sphericalangle ENA$. Sei F der Schnittpunkt von AN mit EB und setze $\alpha = \sphericalangle MAN$. Es folgt nun der Reihe nach (Erklärungen in Klammer, siehe Abbildung):

1.) $\sphericalangle BNA = \alpha$ (Gegenwinkel an den Parallelen AD und BC)

2.) $\sphericalangle NBF = 90° - \alpha$ ($\triangle BNF$ ist rechtwinklig, weil AN parallel zu MC ist und MC nach Vorraussetzung rechtwinklig auf EB steht.)

3.) $\sphericalangle BEN = 90° - \alpha$ (Der Thaleskreis über der Strecke BC zeigt, dass $\triangle NEB$ gleichschenklig ist.)

4.) $\sphericalangle ENA = \alpha$ ($\triangle ENF$ ist ebenfalls rechtwinkig.)



(b) Da die beiden Dreiecke $\triangle ABN$ und $\triangle CDM$ kongruent sind, lässt sich das Problem vereinfachen: Wir müssen noch zeigen, dass $\triangle ANE$ die Hälfte des Parallelogramms $ANCM$ abdeckt. Dies ist auf verschiedene Arten möglich, wir werden hier zwei Lösungen geben (die eckigen Klammern bezeichnen die Fläche):

1.) $[ANCM] = AN \cdot EF = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AN \cdot EF = 2 \cdot [ANE]$

2.) Sei P der Schnittpunkt von AN mit der Parallelen von NC durch E. Nun ist $APEM$ ein Parallelogramm, das durch AE in zwei gleiche Stücke geschnitten wird. Die eine Hälfte gehört zum Dreieck ANE, die andere nicht. Analog für das Parallelogramm $PNCE$.

Alternativ kann man auch so argumentieren: $\triangle BNE$ ist gleichschenklig. Wegen $\sphericalangle AFB = 90°$ liegen E und B symmetrisch bezüglich der Gerade AN. Somit sind die Dreiecke $\triangle ABN$ und $\triangle AEN$ kongruent und daher flächengleich. Die Behauptung folgt nun daraus, dass die Fläche von $\triangle ABN$ ein Viertel der Fläche des Rechtecks $ABCD$ ist.

Bemerkungen und Punkteschema:

Teil (a) gab vier Punkte. Teilpunkte gab es für folgende *unabhängige* Beobachtungen:
AN ist parallel zu MC (1 P)
Die Feststellung, dass es zusätzlich genügt zu zeigen, dass $\triangle BNE$ gleichschenklig ist (1 P).
Teil (b) gab drei Punkte. Teilpunkte wurden keine verteilt.

2. Zeige, dass es in jedem konvexen 9-Eck zwei verschiedene Diagonalen gibt, sodass die beiden Geraden, auf denen diese Diagonalen liegen, entweder parallel sind, oder sich in einem Winkel von weniger als 7° schneiden.

1. Lösung:

Ein konvexes 9-Eck besitzt $\binom{9}{2} - 9 = 27$ Diagonalen. Wir verschieben die Diagonalen parallel, sodass alle durch einen festen Punkt P gehen. Nun wählen wir eine beliebige Diagonale aus und nenne sie d_1. Dreht man d_1 im Gegenuhrzeigersinn um P, dann werden die anderen Diagonalen eine nach der anderen überstrichen. Wir nennen sie in dieser Reihenfolge $d_2, \ldots, d_{27}$. Sei nun α_i der Winkel zwischen d_i und d_{i+1} für $1 \leq i \leq 26$ und sei α_{27} der Winkel zwischen d_{27} und d_1. Dann gilt $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{27} = 180°$, und daher ist einer dieser Winkel höchstens gleich $180°/27 < 7°$. Die beiden zugehörigen Diagonalen im 9-Eck sind dann parallel oder ihre Verlängerungen schneiden sich in einem Winkel von weniger als $7°$.

2. Lösung:

Seien $d_1, \ldots, d_{27}$ die Diagonalen des 9-Ecks. Wähle eine horizontale Gerade h, die unter dem 9-Eck liegt, und definiere α_i als den kleinsten Winkel, um den man die Gerade h im Gegenuhrzeigersinn drehen muss, sodass sie parallel zu d_i liegt (es gilt also genau dann $\alpha_i = 0$, wenn d_i und h parallel sind). Nach Konstruktion ist $0 \leq \alpha_i < 180°$. Unterteile das Intervall $[\,0°, 180°\,[$ in 26 gleichlange Teilintervalle, dann liegen nach dem Schubfachprinzip zwei der Winkel α_i im gleichen Teilintervall. Die beiden zugehörigen Diagonalen sind dann parallel oder ihre Verlängerungen schneiden sich in einem Winkel von höchstens $180°/26 < 7°$.

Bemerkungen und Punkteschema:

Die Berechnung der Anzahl Diagonalen gab 1 Punkt. Je nach Vollständigkeit und Richtigkeit der nachfolgenden Argumentation variiert die Endpunktzahl zwischen 2 und 7. Die blosse Feststellung, dass $180°/27 < 7°$ ist, gab insgesamt 2 Punkte. Lösungen, die weder einen festen Referenzpunkt noch eine Referenzgerade benutzten, waren in der Regel nicht mehr als 5 Punkte wert.

3. Seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass dann auch die beiden Zahlen

$$m^3 + mn + n^3 \qquad \text{und} \qquad mn(m+n)$$

teilerfremd sind.

Lösung:

Wir zeigen zuerst, dass m^3+mn+n^3 teilerfremd zu m ist. Nehme an nicht, dann gibt es eine Primzahl p die beide Zahlen teilt. Dann teilt p aber auch $(m^3-mn+n^3)-m(m^2+n) = n^3$, also auch n, im Widerspruch dazu, dass m und n teilerfremd sind. Analog folgt, dass m^3+mn+n^3 und n teilerfremd sind. Sei nun p ein Teiler von m^3+mn+n^3 und von $m+n$. Dann teilt p auch $(m^3+mn+n^3)-(m+n)(m^2-mn+n^2) = mn$, also ist p ein Teiler von m oder n, im Widerspruch zu den bisherigen Ausführungen.

Daher ist die erste Zahl teilerfremd zu allen drei Faktoren rechts, also auch zu deren Produkt.

Bemerkungen und Punkteschema:

Die Feststellung, dass es genügt zu zeigen, dass die erste Zahl teilerfremd zu m, n und $m+n$ ist, war 1 Punkt wert. *Weitere* 2 Punkte gabs für den Beweis von $ggT(m^3+mn+n^3, m) = 1$.
Viele argumentierten mit Teilbarkeit, bzw. beliebigen Teilern von m und n. Dabei ist jedoch stets zu beachten, dass 'sind teilerfremd' nicht dasselbe ist wie 'teilt nicht'. Entsprechend unkorrekte Argumentationen gaben Abzug.

4. Sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60°$. Finde alle Punkte P im Innern dieses Dreiecks mit folgender Eigenschaft:

Ist D die Projektion von P auf die Gerade BC, E die Projektion von P auf CA und F die Projektion von P auf AB, dann gilt $\sphericalangle EDF = 30°$.

Lösung:

Wir setzen $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$, sowie $\varphi = \sphericalangle EDP$ und $\psi = \sphericalangle FDP$. Wegen $\sphericalangle PEC = \sphericalangle PDC = 90°$ ist $EPDC$ ein Sehnenviereck, daher gilt $\sphericalangle ECP = \varphi$. Analog ist $FPDB$ ein Sehnenviereck und daher gilt $\sphericalangle FBP = \psi$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sphericalangle BPC &= 180° - \sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB \\ &= 180° - (\beta - \psi) - (\gamma - \varphi) \\ &= (180° - \beta - \gamma) + \varphi + \psi \\ &= \alpha + (\varphi + \psi) = 60° + \sphericalangle EDF. \end{aligned}$$

Somit gilt genau dann $\sphericalangle EDF = 30°$, wenn $\sphericalangle BPC = 90°$. Die gesuchten Punkte P sind daher genau die Punkte im Inneren von ABC, die auf dem Thaleskreis über der Strecke BC liegen.

Bemerkungen und Punkteschema:

Das Erkennen der beiden Sehnenvierecke $EPDC$ und $FPDB$ gab einen Punkt (nicht aber das des Sehnenvierecks $FPEA$). *Unabhängig davon* gab das Aufteilen des Winkels $\sphericalangle EDF$ in die Winkel $\sphericalangle EDP$ und $\sphericalangle PDF$ ebenfalls einen Punkt. Hat man dies verwendet, um zu zeigen $\sphericalangle EDP = \sphericalangle ECP$ und $\sphericalangle PDF = \sphericalangle PBF$, gab es 3 Punkte.
Wer nicht gezeigt hat, dass auch jeder Punkt auf dem Thaleskreis die Eigenschaft erfüllt, erhielt einen Punkt Abzug.

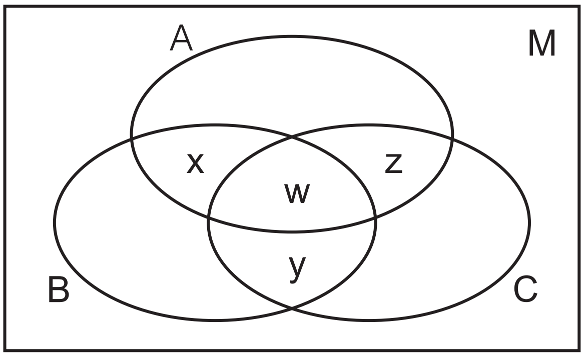
5. Sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl Möglichkeiten, drei Teilmengen A, B, C von M auszuwählen, sodass gilt

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \cap A \neq \emptyset,$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Lösung:

Betrachte das Venn-Diagramm in der Abbildung. Ein Tripel (A, B, C) wie in der Aufgabe zu wählen, ist dasselbe wie die n Elemente von M so auf die acht Felder in diesem Diagramm zu verteilen, dass das Feld w leer ist, nicht aber die Felder x, y und z.



Wir zählen zuerst die Anzahl Tripel (A, B, C), sodass $A \cap B \cap C = \emptyset$ gilt. Jedes der n Elemente kann in jedem Feld ausser w liegen, das Feld w muss leer bleiben. Folglich gibt es nach der Produktregel genau 7^n solche Tripel.

Von dieser Zahl müssen wir noch die Anzahl Tripel (A, B, C) abzählen, für die $A \cap B = \emptyset$ oder $B \cap C = \emptyset$ oder $C \cap A = \emptyset$ gilt (beachte, dass dann automatisch auch $A \cap B \cap C = \emptyset$ gilt, wir müssen diese Bedingung als nicht mehr beachten). Wir setzen

$$\begin{aligned} X &= \{(A, B, C) \mid A \cap B = \emptyset\}, \\ Y &= \{(A, B, C) \mid B \cap C = \emptyset\}, \\ Z &= \{(A, B, C) \mid C \cap A = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Nach der Ein-/Ausschaltformel gilt

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |Z \cap X| + |X \cap Y \cap Z|,$$

ausserdem ist aus Symmetriegründen natürlich $|X| = |Y| = |Z|$ und $|X \cap Y| = |Y \cap Z| = |Z \cap X|$. Die Tripel in X entsprechen genau den Verteilungen, in denen die beiden Felder x und w leer bleiben, folglich gilt $|X| = 6^n$. Bei den Tripeln in $|X \cap Y|$ müssen die Felder w, x und y leer bleiben, also ist $|X \cap Y| = 5^n$. Bei den Tripeln in $|X \cap Y \cap Z|$

schliesslich bleiben die Felder w, x, y und z leer, also ist $|X \cap Y \cap Z| = 4^n$. Zusammen ergibt das $|X \cup Y \cup Z| = 3 \cdot 6^n - 3 \cdot 5^n + 4^n$. Die gesuchte Anzahl ist daher gleich

$$7^n - 3 \cdot 6^n + 3 \cdot 5^n - 4^n.$$

Bemerkungen und Punkteschema:

Ein Ansatz der Form 7^n minus Anzahl Verteilungen mit $A \cap B = \emptyset$ oder $B \cap C = \emptyset$ oder $C \cap A = \emptyset$ gab 2 Punkte. Eine richtige Implementierung der Ein-Ausschaltformel gab *weitere* 2 Punkte.
Andere Ansätze gaben im Allgemeinen höchstens 1 Punkt, da diese kaum zu einer expliziten Formel führen.