

# IMO - Selektion 2001 Lösungen

1. Einem Kreis ist ein konvexes Viereck  $ABCD$  eingeschrieben. Zeige, dass die Sehne, welche die Mittelpunkte der beiden Bogen  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{CD}$  verbindet, senkrecht steht auf der Sehne, welche die beiden Bogenmittelpunkte von  $\widehat{BC}$  und  $\widehat{DA}$  miteinander verbindet.

## Lösung

**Lemma.** Sei  $ABCD$  ein konvexes Sehnenviereck und  $P$  der Diagonalschnittpunkt. Es gilt

$$\angle APB = \angle ACB + \angle CBD$$

oder in Worten ausgedrückt: der Winkel  $\angle APB$  ist so gross wie die Summe der beiden Peripheriewinkel über  $AB$  und  $CD$ .

*Beweis des Lemmas.* Aussenwinkelsatz in  $\triangle BCP$ . □

Wir nennen die Bogenmittelpunkte von  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$  und  $\widehat{DA}$  mit  $M$ ,  $N$ ,  $P$  bzw.  $Q$ . Nach obigem Lemma stehen die Geraden  $MP$  und  $NQ$  senkrecht aufeinander, wenn die Summe der beiden Bogen  $\widehat{MN}$  und  $\widehat{PQ}$  einen Halbkreis bildet. Dies ist der Fall, denn

$$\begin{aligned}\widehat{MN} + \widehat{PQ} &= \widehat{MB} + \widehat{BN} + \widehat{PD} + \widehat{DQ} \\ &= \widehat{MA} + \widehat{CN} + \widehat{PC} + \widehat{AQ} \\ &= \widehat{QM} + \widehat{NP}\end{aligned}$$

Somit ist  $\widehat{MN} + \widehat{PQ} = \widehat{QM} + \widehat{NP} =$  halber Kreisumfang.

2. Die reellen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_{16}$  erfüllen die beiden Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{16} a_i = 100 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{16} a_i^2 = 1000.$$

Was ist der grösstmögliche Wert, den  $a_{16}$  annehmen kann?

## Lösung

Setze  $S = a_1 + \dots + a_{15}$  und  $Q = a_1^2 + \dots + a_{15}^2$ . Nach AM-QM gilt  $S^2 \leq 15Q$ . Die Nebenbedingungen lauten  $100 - a_{16} = S$  und  $1000 - a_{16}^2 = Q$ . Quadriert man die erste und subtrahiert 15 mal die zweiten, dann folgt

$$16a_{16}^2 - 200a_{16} - 5000 = S^2 - 15Q \leq 0.$$

Das quadratische Polynom links hat die Nullstellen  $-25/2$  und  $25$ . Daher gilt  $a_{16} \leq 25$ . Gilt Gleichheit, dann muss auch in AM-GM Gleichheit herrschen, also  $a_1 = \dots = a_{15}$ . Einsetzen in die Nebenbedingungen liefert die Lösung  $a_1 = \dots = a_{15} = 5$  und  $a_{16} = 25$ . Der grösstmögliche Wert ist also in der Tat  $a_{16} = 25$ .

3. Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 und fünf gleich grosse, gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge  $s < 1$ . Zeige: Lässt sich das grosse Dreieck mit den fünf kleinen überdecken, so lässt es sich auch schon mit vier der kleinen überdecken.

### Lösung

Betrachte folgende 6 Punkte im oder auf dem Rand des grossen Dreiecks: die drei Eckpunkte und die drei Seitenmittelpunkte. Wenn sich das grosse Dreieck mit den fünf kleinen überdecken lässt, muss nach dem Schubfachprinzip eines der kleinen Dreiecke mindestens 2 dieser 6 Punkte überdecken. Diese 6 Punkte haben aber gegenseitige Abstände  $\geq 1/2$ , also gilt  $s \geq 1/2$ . Nun ist klar, dass bereits vier der Dreiecke genügen, um das grosse zu überdecken.

4. Es sei  $q(n)$  die Quersumme der natürlichen Zahl  $n$ . Bestimme den Wert von

$$q(q(q(2000^{2000}))).$$

### Lösung

Es gilt  $q(2000^{2000}) = q(2^{2000})$ , denn die beiden Zahlen unterscheiden sich nur um angehängte Nullen. Wir schätzen nun ab. Es gilt  $2^{2000} = 4 \cdot 8^{666} < 10^{667}$  und somit

$$q(2^{2000}) \leq 9 \cdot 667 = 6003.$$

Weiter ist damit

$$q(q(2^{2000})) \leq 5 + 9 + 9 + 9 = 32 \quad \text{und} \quad q(q(q(2^{2000}))) \leq 2 + 9 = 11.$$

Andererseits gilt bekanntlich  $q(n) \equiv n \pmod{9}$  für alle natürlichen Zahlen  $n$ . Mit  $\varphi(9) = 6$  ergibt sich

$$2000^{2000} \equiv 2^{333 \cdot 6 + 2} = (2^6)^{333} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{9}.$$

Die gesuchte Zahl ist also einerseits  $\leq 11$  und andererseits  $\equiv 4 \pmod{9}$ , also gleich 4.

5. Mit Hilfe der drei Buchstaben I, M, O werden Wörter der Länge  $n$  gebildet. Wieviele solche Wörter der Länge  $n$  gibt es, in denen keine benachbarten M's vorkommen?

### Lösung

Wir nennen ein Wort *zulässig*, wenn es keine zwei benachbarten M's enthält. Sei  $a_n$  die Anzahl zulässiger Wörter der Länge  $n$  und  $b_n$  die Anzahl zulässiger Wörter der Länge  $n$ , die nicht mit einem M beginnen. Nehme ein zulässiges Wort der Länge  $n$  und entferne den ersten Buchstaben, das verbleibende Wort nennen wir *Stumpf*. Der Stumpf ist ein zulässiges Wort der Länge  $n - 1$ . Beginnt das Wort nicht mit einem M, dann gibt es keine Einschränkung an den Stumpf, also  $a_{n-1}$  Möglichkeiten. Beginnt es aber mit einem M, darf der Stumpf nicht auch mit M beginnen, es bleiben also  $b_{n-1}$  Möglichkeiten. Dies liefert die Rekursionsgleichungen  $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$  und  $b_n = 2a_{n-1}$ . Kombination dieser Gleichungen liefert sofort

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Das charakteristische Polynom dieser Rekursionsgleichung lautet  $x^2 - 2x - 2$  und hat die Nullstellen  $1 \pm \sqrt{3}$ . Es gibt daher reelle Konstanten  $A$  und  $B$  mit

$$a_n = A(1 + \sqrt{3})^n + B(1 - \sqrt{3})^n.$$

Einsetzen von  $a_1 = 3$  und  $a_2 = 8$  liefert für  $A$  und  $B$  die Gleichungen  $3 = (1 + \sqrt{3})A + (1 - \sqrt{3})B$  und  $8 = (4 + 2\sqrt{3})A + (4 - 2\sqrt{3})B$ . Daraus folgt  $A = (3 + 2\sqrt{3})/6$  und  $B = (3 - 2\sqrt{3})/6$ , es gilt also die explizite Formel

$$a_n = \frac{1}{6} \left[ (3 + 2\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})^n + (3 - 2\sqrt{3})(1 - \sqrt{3})^n \right].$$

Die ersten paar Werte finden sich in untenstehender Tabelle:

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$a_n$	3	8	22	60	164	448	1224

**1a.** Die positiven reellen Zahlen  $x, y$  und  $z$  haben Summe 1. Zeige, dass gilt

$$\sqrt{7x+3} + \sqrt{7y+3} + \sqrt{7z+3} \leq 7.$$

Kann die Zahl 7 auf der rechten Seite durch eine kleinere Zahl ersetzt werden?

### Lösung

Nach AM-QM ist die linke Seite höchstens gleich

$$3 \cdot \sqrt{\frac{(7x+3) + (7y+3) + (7z+3)}{3}} = 3 \cdot \sqrt{16/3} = 4\sqrt{3} < 7.$$

**2a.** Beweise, dass die Gleichung

$$14x^2 + 15y^2 = 7^{2000}$$

keine ganzzahlige Lösungen  $(x, y)$  besitzt.

### Lösung

Betrachte die Gleichung modulo 3. Wegen  $7 \equiv 1 \pmod{3}$  lautet sie

$$2x^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Quadrate sind aber  $\equiv 0, 1 \pmod{3}$ , also nimmt die linke Seite nur die Werte 0 und 2 an, Widerspruch. Es gibt keine ganzzahligen Lösungen.

**3a.** Für  $x > 0$  sei  $f(x) = 4^x / (4^x + 2)$ . Bestimme den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{1290} f\left(\frac{k}{1291}\right).$$

### Lösung

Es gilt für  $0 < x < 1/2$

$$f\left(\frac{1}{2} + x\right) + f\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{2 \cdot 4^x}{2 \cdot 4^x + 2} + \frac{2 \cdot 4^{-x}}{2 \cdot 4^{-x} + 2} = \frac{4^x}{4^x + 1} + \frac{1}{1 + 4^x} = 1,$$

wobei wir beide Brüche mit 2 gekürzt und den zweiten mit  $4^x$  erweitert haben. Damit folgt nun leicht

$$\sum_{k=1}^{1290} f\left(\frac{k}{1291}\right) = \sum_{k=1}^{645} f\left(\frac{k}{1291}\right) + f\left(1 - \frac{k}{1291}\right) = \sum_{k=1}^{645} 1 = 645.$$

- 4a. Gegeben sind zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$ , die sich in den verschiedenen Punkten  $P$  und  $Q$  schneiden. Konstruiere eine durch  $P$  verlaufende Strecke  $AB$  mit ihren Endpunkten auf  $k_1$  und  $k_2$ , sodass das Produkt  $|AP| \cdot |PB|$  maximal ist.

### Lösung

Seien  $t_1$  und  $t_2$  die Tangenten an  $k_1$  und  $k_2$  in  $P$ . Diese zerlegen die Ebene in vier Gebiete, von denen eines den Punkt  $Q$  enthält. Sei  $G$  die Vereinigung der beiden gegenüberliegenden Gebiete, welche den Punkt  $Q$  nicht enthalten. Offenbar muss die Strecke  $AB$  ganz in  $G$  verlaufen denn sonst ist  $A = P$  oder  $B = P$  und das Produkt  $|AP| \cdot |PB|$  verschwindet. Sei  $\alpha$  der Öffnungswinkel von  $G$  und sei  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  der Winkel zwischen  $AB$  und  $t_1$ . Seien  $r_1, r_2$  die Radien der Kreise  $k_1, k_2$ . Nach dem Tangentenzentriwinkelsatz besitzt die Sehne  $AP$  in  $k_1$  den Zentriwinkel  $2\varphi$  und hat daher die Länge  $|AP| = 2r_1 \sin(\varphi)$ . Der Winkel zwischen  $PB$  und  $t_2$  ist gleich  $\alpha - \varphi$  und man erhält analog  $|PB| = 2r_2 \sin(\alpha - \varphi)$ . Um nun das Produkt  $|AP| \cdot |PB|$  zu maximieren, müssen wir das Maximum von  $\sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi)$  finden. Nach der Produkt-zu-Summen Formel gilt

$$\sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi) = \frac{1}{2}(\cos(2\varphi - \alpha) - \cos(\alpha)).$$

Dies ist genau dann maximal, wenn der erste Summand den grösstmöglichen Wert annimmt, also wenn  $\varphi = \alpha/2$ . Die gesuchte Strecke liegt also auf der in  $G$  liegenden Winkelhalbierenden der beiden Tangenten.

- 5a. Auf einer kreisförmigen Rennbahn ist an  $n$  verschiedenen Positionen je ein Auto startbereit. Jedes von ihnen fährt mit konstantem Tempo und braucht eine Stunde pro Runde. Sobald das Startsignal ertönt, fährt jedes Auto sofort los, egal in welche der beiden möglichen Richtungen. Falls sich zwei Autos begegnen, ändern beide ihre Richtung und fahren ohne Zeitverlust weiter. Zeige, dass es einen Zeitpunkt gibt, in dem sich alle Autos wieder in ihren ursprünglichen Startpositionen befinden.

### Lösung

Nehme an, jedes Auto führt eine Fahne mit sich. Wenn sich zwei Autos begegnen, tauschen sie die Fahnen aus. Die Fahnen ändern also nie ihre Bewegungsrichtung und sind daher nach einer Stunde alle wieder an ihrem ursprünglichen Platz. Das bedeutet aber, dass auch die  $n$  Autos wieder alle auf den Startpositionen stehen, aber eventuell permutiert. Sei  $\pi$  diese Permutation. Jede weitere Stunde permutiert die Autos offenbar wieder in derselben Weise (die Fahrtrichtung an jedem der Startplätze ist dieselbe

wie am Anfang), also ist die Platzvertauschung der Autos nach  $k$  Runden gegeben durch die Permutation  $\pi^k = \pi \circ \dots \circ \pi$ . Wir zeigen nun, dass eine Zahl  $d$  existiert, sodass  $\pi^d = \text{id}$  die Identität ist. Dann befinden sich alle Autos nach  $d$  Runden wieder auf ihrem Startplatz.

Betrachte dazu die Folge  $\pi, \pi^2, \pi^3, \dots$ . Da es nur endlich viele Permutationen von  $n$  Dingen gibt (nämlich  $n!$  Stück), müssen zwei Glieder in dieser Folge übereinstimmen, das heisst, es gibt  $i < j$  mit  $\pi^i = \pi^j$ . Da  $\pi$  eine bijektive Abbildung ist, können wir diese Gleichung mit  $\pi^i$  kürzen und erhalten  $\pi^{j-i} = \text{id}$ , wie gewünscht.

6. Jede Ecke eines regelmässigen  $2n$ -Ecks ( $n \geq 3$ ) soll mit einer Zahl aus der Menge  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  beschriftet werden, und zwar so, dass die Summe der Zahlen benachbarter Ecken stets gleich ist wie die Summe der Zahlen in den beiden diametral gegenüberliegenden Ecken. Zudem müssen die in den  $2n$  Ecken stehenden Zahlen alle verschieden sein. Zeige, dass dies genau dann möglich ist, wenn  $n$  ungerade ist.

### Lösung

Die Zahlen in den Ecken seien  $a_1, \dots, a_{2n}$  in dieser Reihenfolge, die Indizes werden wir modulo  $2n$  betrachten. Wir können oBdA annehmen, dass  $a_1 > a_{n+1}$  ist. Da  $a_1 + a_2 = a_{n+1} + a_{n+2}$  gilt, muss  $a_2 < a_{n+2}$  sein. Mit der gleichen Argumentation folgt induktiv  $a_i > a_{n+i}$  falls  $i$  ungerade ist und  $a_i < a_{n+i}$  falls  $i$  gerade ist. Wenn nun  $n$  gerade ist, folgt daraus insbesondere  $a_{n+1} > a_{2n+1} = a_1$ , im Widerspruch zur Annahme. Daher muss  $n$  ungerade sein. Man rechnet leicht nach, dass für ungerades  $n = 2k + 1$  folgende Zahlverteilung die gewünschte Eigenschaft hat:

$$\begin{aligned} a_{2i+1} &= 1 + 4i & 0 \leq i \leq k \\ a_{2i} &= 4i & 1 \leq i \leq k \\ a_{n+2i+1} &= 2 + 4i & 0 \leq i \leq k \\ a_{n+2i} &= -1 + 4i & 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

Damit sind die Bedingungen der Aufgabe genau dann erfüllbar, wenn  $n$  ungerade ist.

7. Bestimme alle Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass für alle reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x).$$

### Lösung

Setzt man in der Gleichung  $y = -f(x)$  ein, dann folgt

$$f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4f(x)^2. \tag{1}$$

Für  $y = x^2$  erhält man

$$f(f(x) + x^2) = f(0) + 4x^2f(x). \tag{2}$$

Kombination von (1) und (2) ergibt nun  $4f(x)^2 = f(f(x) + x^2) - f(0) = 4x^2f(x)$ , also  $f(x)(f(x) - x^2) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt, dass für jede reelle Zahl  $x$  entweder  $f(x) = 0$  oder  $f(x) = x^2$  gilt. Insbesondere ist  $f(0) = 0$  und Einsetzen von  $x = 0$  in

der ursprünglichen Gleichung ergibt  $f(y) = f(-y)$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ , folglich ist  $f$  eine gerade Funktion.

Nehme nun an, es gäbe reelle Zahlen  $a, b \neq 0$  mit  $f(a) = 0$  und  $f(b) = b^2$ . Einsetzen von  $x = a$  und  $y = b$  ergibt dann  $b^2 = f(b) = f(a^2 - b)$ . Die rechte Seite ist gleich 0 oder gleich  $(a^2 - b)^2$ . Ersteres kann nicht sein, denn dann wäre  $a = 0$ , im Widerspruch zur Annahme. Daher gilt  $b^2 = (a^2 - b)^2$ , also  $a^2 - b = \pm b$ . Steht rechts das Minuszeichen, folgt wieder  $a = 0$ , Widerspruch. Folglich muss  $a^2 = 2b$  gelten. Da  $f$  gerade ist, gilt nun auch  $f(-b) = (-b)^2$  und dieselbe Argumentation mit  $a$  und  $-b$  ergibt  $a^2 = -2b$ . Daraus folgt  $a = b = 0$ , Widerspruch. Folglich ist entweder  $f(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  oder  $f(x) = x^2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Man rechnet leicht nach, dass diese beiden Funktionen tatsächlich Lösungen der Gleichung sind.

8. Der Inkreis des Dreiecks  $ABC$  berührt die Seiten  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$  in den Punkten  $D$ ,  $E$  und  $F$ . Sei  $P$  ein Punkt im Innern von  $ABC$ , sodass der Inkreis von  $ABP$  die Seite  $AB$  ebenfalls in  $D$  berührt und die Seiten  $AP$  und  $BP$  in den Punkten  $Q$  und  $R$ . Zeige, dass die vier Punkte  $E$ ,  $F$ ,  $R$  und  $Q$  auf einem Kreis liegen.

### Lösung

Wir zeigen im Folgenden mit Winkeljagd, dass  $\angle FER + \angle FQR = 180^\circ$  gilt.

Sei  $I$  der Inkreismittelpunkt und  $k_1$  der Inkreis von  $\triangle ABC$  und  $k_2$  der Inkreis von  $\triangle ABP$ . Die Geraden  $AF$  und  $AD$  liegen beide tangential an  $k_1$ , es gilt also  $AF = AD$ . Ebenfalls liegen  $AQ$  und  $AD$  beide tangential an  $k_2$ , woraus  $AQ = AD$  folgt. Zusammen und mit analoger Überlegung für  $B$  erhalten wir

$$AD = AQ = AF \quad \text{und} \quad BD = BR = BE.$$

Wir benennen den Kreis mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $AD$  mit  $k_A$  und den Kreis mit Mittelpunkt  $B$  und Radius  $BD$  mit  $k_B$ . Nun führen wir Bezeichnungen für die Winkel ein:

$$\angle DAQ = 2\alpha \quad \angle QAF = 2\beta \quad \angle DBR = 2\gamma \quad \angle RBE = 2\delta.$$

Aus dem Zentri-Peripheriewinkelsatz folgt daraus

$$\angle DFQ = \alpha \quad \angle QDF = \beta \quad \angle DER = \gamma \quad \angle RDE = \delta.$$

Weil  $ADIF$  ein Sehnenviereck ist (rechte Winkel bei  $D$  und  $F$ ), gilt  $\angle FID = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ . Vom Zentri-Peripheriewinkelsatz in  $k_1$  erhalten wir nun

$$\angle FER = \angle FED - \angle DER = \frac{1}{2}\angle FID - \gamma = 90^\circ - \alpha - \beta - \gamma.$$

Wir wollen nun noch  $\angle FQR$  berechnen. Dazu bemerken wir als erstes, dass aus der Gleichschenkligkeit von  $\triangle BDR$  folgt  $\angle DRB = 90^\circ - \gamma$ . Die Gerade  $BR$  liegt tangential an  $k_2$  und nach dem Tangentenwinkelsatz erhalten wir  $\angle RQD = 90^\circ - \gamma$ . Wir können nun  $\angle FQR$  ausrechnen

$$\begin{aligned} \angle FQR &= 360^\circ - \angle FQD - \angle DQR = 360^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - (90^\circ - \gamma) \\ &= 90^\circ + \alpha + \beta + \gamma \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt nun  $\angle FER + \angle FQR = 180^\circ$ .

9. Sei  $P$  ein Polynom vom Grad  $n$ , sodass gilt

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Finde  $P(n+1)$ .

### Lösung

Betrachte das Polynom  $Q(x) = (x+1)P(x) - x$ .  $Q$  hat Grad  $n+1$  und nach Voraussetzung die  $n+1$  Nullstellen  $k = 0, 1, \dots, n$ . Es gibt also eine Konstante  $a$  mit

$$Q(x) = ax(x-1)(x-2) \cdots (x-n).$$

Ausserdem ist  $Q(-1) = ((-1)+1)P(-1) - (-1) = 1$ . Einsetzen von  $x = -1$  in obige Formel liefert dann  $1 = (-1)^{n+1}(n+1)! \cdot a$ , also  $a = (-1)^{n+1}/(n+1)!$ . Daraus folgt jetzt  $Q(n+1) = (-1)^{n+1}$  und somit

$$P(n+1) = \frac{Q(n+1) - (n+1)}{n+2} = \begin{cases} -1 & n \text{ gerade,} \\ \frac{n}{n+2} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

10. Es sei  $S = \{P_1, P_2, \dots, P_{2000}\}$  eine Menge von 2000 Punkten im Innern eines Kreises vom Radius 1, sodass einer der Punkte der Kreismittelpunkt ist. Für  $i = 1, 2, \dots, 2000$  bezeichne  $x_i$  den Abstand von  $P_i$  zum nächstgelegenen Punkt  $P_j \neq P_i$  aus  $S$ . Zeige, dass gilt

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2000}^2 < 9.$$

### Lösung

Da einer der Punkte der Kreismittelpunkt ist, gilt  $x_i < 1$  für alle  $i$ . Zeichne um jeden Punkt  $P_i \in S$  einen Kreis mit Radius  $x_i/2$ . Je zwei dieser Kreise haben höchstens einen Randpunkt gemeinsam. Falls nicht, dann gibt es zwei Indizes  $i, j$  und einen Punkt  $A$  der im Innern des Kreises um  $P_i$  und im Innern oder auf dem Rand des Kreises um  $P_j$  liegt. Nach der Dreiecksungleichung folgt dann aber

$$|P_i P_j| \leq |P_i A| + |A P_j| < x_i/2 + x_j/2 \leq \max\{x_i, x_j\},$$

im Widerspruch zur Definition von  $x_i$  und  $x_j$ . Betrachte einen grossen Kreis vom Radius  $3/2$  mit demselben Mittelpunkt wie der gegebene Kreis von Radius 1. Alle kleinen Kreise liegen ganz in diesem grossen Kreis drin, denn es gilt ja  $x_i < 1$  für alle  $i$ . Da sie sich nicht überlappen, ist die Summe ihrer Flächen höchstens so gross wie die Fläche des grossen Kreises (in der Tat echt kleiner!). Dies liefert

$$\sum_{i=1}^{2000} \pi(x_i/2)^2 < \pi(3/2)^2.$$

Kürzt man dies mit  $\pi/4$ , dann folgt die Behauptung.