Schweizer IMO - Selektion 2000

erste Prüfung - 28. April 2000

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Einem Kreis ist ein konvexes Viereck $ABCD$ einbeschrieben. Zeige, dass die Sehne, welche die Mittelpunkte der beiden Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{CD}$ verbindet, senkrecht steht auf der Sehne, welche die beiden Bogenmittelpunkte von $\widehat{BC}$ und $\widehat{DA}$ miteinander verbindet.

2. Die reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ erfüllen die beiden Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{16} a_i = 100 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{16} a_i^2 = 1000.$$

Was ist der grösstmögliche Wert, den a_{16} annehmen kann?

3. Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 und fünf gleich grosse, gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge $s < 1$. Zeige: Lässt sich das grosse Dreieck mit den fünf kleinen überdecken, so lässt es sich auch schon mit vier der kleinen überdecken.

4. Es sei $q(n)$ die Quersumme der natürlichen Zahl n. Bestimme den Wert von

$$q(q(q(2000^{2000}))).$$

5. Mit Hilfe der drei Buchstaben I, O, M werden Wörter der Länge n gebildet. Wieviele solche Wörter der Länge n gibt es, in denen keine benachbarten M's vorkommen?

Schweizer IMO - Selektion 2000

Nachprüfung zum 28. April

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Die positiven reellen Zahlen x, y und z haben Summe 1. Zeige, dass gilt

$$\sqrt{7x+3} + \sqrt{7y+3} + \sqrt{7z+3} \leq 7.$$

Kann die Zahl 7 auf der rechten Seite durch eine kleinere Zahl ersetzt werden?

2. Beweise, dass die Gleichung

$$14x^2 + 15y^2 = 7^{2000}$$

keine ganzzahlige Lösungen (x, y) besitzt.

3. Für $x > 0$ sei $f(x) = 4^x/(4^x + 2)$. Bestimme den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{1290} f\left(\frac{k}{1291}\right).$$

4. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich in den verschiedenen Punkten P und Q schneiden. Konstruiere eine durch P verlaufende Strecke AB mit ihren Endpunkten auf k_1 und k_2, sodass das Produkt $|AP| \cdot |PB|$ maximal ist.

5. Auf einer kreisförmigen Rennbahn ist an n verschiedenen Positionen je ein Auto startbereit. Jedes von ihnen fährt mit konstantem Tempo und braucht eine Stunde pro Runde. Sobald das Startsignal ertönt, fährt jedes Auto sofort los, egal in welche der beiden möglichen Richtungen. Falls sich zwei Autos begegnen, ändern beide ihre Richtung und fahren ohne Zeitverlust weiter. Zeige, dass es einen Zeitpunkt gibt, in dem sich alle Autos wieder in ihren ursprünglichen Startpositionen befinden.

Schweizer IMO - Selektion 2000

zweite Prüfung - 20. Mai 2000

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Jede Ecke eines regelmässigen $2n$-Ecks ($n \geq 3$) soll mit einer Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ beschriftet werden, und zwar so, dass die Summe der Zahlen benachbarter Ecken stets gleich ist wie die Summe der Zahlen in den beiden diametral gegenüberliegenden Ecken. Zudem müssen die in den $2n$ Ecken stehenden Zahlen alle verschieden sein. Zeige, dass dies genau dann möglich ist, wenn n ungerade ist.

2. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x).$$

3. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten AB, BC und CA in den Punkten D, E und F. Sei P ein Punkt im Innern von ABC, sodass der Inkreis von ABP die Seite AB ebenfalls in D berührt und die Seiten AP und BP in den Punkten Q und R. Zeige, dass die vier Punkte E, F, R und Q auf einem Kreis liegen.

4. Sei P ein Polynom vom Grad n, sodass gilt

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \qquad \text{für} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Finde $P(n+1)$.

5. Es sei $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_{2000}\}$ eine Menge von 2000 Punkten im Innern eines Kreises vom Radius 1, sodass einer der Punkte der Kreismittelpunkt ist. Für $i = 1, 2, \ldots, 2000$ bezeichne x_i den Abstand von P_i zum nächstgelegenen Punkt $P_j \neq P_i$ aus S. Zeige, dass gilt

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2000}^2 < 9.$$