Schweizer IMO - Selektion 1998

erste Prüfung - 7. Mai 1998

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für welche gilt

(a) $f(x) - f(y) = f(x)f(\frac{1}{y}) - f(\frac{1}{x})f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(b) f nimmt den Wert $1/2$ mindestens einmal an.

Bestimme $f(-1)$.

2. Bestimme alle ganzzahligen und nichtnegativen Lösungen (x, y, z) der Gleichung

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z+2}.$$

3. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Bestimme (ohne Ableitungen zu benützen) das Minimum der Funktion

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}.$$

4. Man bestimme alle Zahlen n, für welche gilt:
Es gibt eine Möglichkeit, ein Quadrat in n Teilquadrate zu zerschneiden.

5. Es sei k ein Kreis und A, B seien zwei Punkte auf k. In diesen Punkten werden die Tangenten an k gezeichnet und im gleichen Umlaufsinn die gleich langen Tangentenabschnitte AP und BQ abgetragen. Beweise, dass die Strecke PQ von der Geraden AB halbiert wird.

Schweizer IMO - Selektion 1998

zweite Prüfung - 23. Mai 1998

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle Primzahlen p, sodass p^2+11 genau 6 verschiedene positive Teiler besitzt.

2. Betrachte eine $n \times n$-Matrix, bei der im Feld der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Eintrag $i+j-1$ steht. Welches ist das kleinstmögliche Produkt von n Zahlen dieser Matrix, wenn gefordert wird, dass in jeder Zeile und jeder Spalte einer dieser n Zahlen steht?

3. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt in dessen Innern. Die Geraden AP, BP und CP schneiden die Seiten BC, CA und AB in den Punkten X, Y und Z. Beweise, dass gilt

$$|XY| \cdot |YZ| \cdot |ZX| \geq |XB| \cdot |YC| \cdot |ZA|.$$

4. Zeige, dass für alle positiven Zahlen x und y gilt

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{xy}.$$

5. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

(a) $|f(x)| \leq 1 \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x+\frac{13}{42}) + f(x) = f(x+\frac{1}{6}) + f(x+\frac{1}{7}) \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeige, dass f periodisch ist.