OSM - Tour préliminaire 2018

Lausanne, Lugano, Zürich - 13 janvier 2018

Temps : 3 heures
Difficulté : Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Géométrie

G1) Soit ABC un triangle et soit $\gamma = \angle ACB$. Supposons que les inégalités $\gamma/2 < \angle BAC$ et $\gamma/2 < \angle CBA$ soient vérifiées. Soit D le point sur le côté BC tel que $\angle BAD = \gamma/2$. Soit E le point sur le côté CA tel que $\angle EBA = \gamma/2$. De plus soit F le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\angle ACB$ avec le côté AB. Montrer que $EF + FD = AB$.

G2) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit et O le centre de son cercle circonscrit. Supposons que les diagonales AC et BD soient perpendiculaires. Soit g la réflexion de la diagonale AC par rapport à la bissectrice de l'angle $\angle BAD$. Montrer que la droite g passe par le point O.

Combinatoire

C1) À OSM-Land vivent 1111 habitants. Les onze joueurs de l'équipe de football du Liechtenstein distribuent des autographes à tous les habitants de sorte qu'aucun habitant ne reçoive un même autographe à double (c'est-à-dire : chaque habitant, pour un joueur donné, soit reçoit un autographe de sa part, soit n'en reçoit pas).

(a) Combien de lots différents d'autographes un habitant peut-il recevoir ?

(b) Après la distribution, les habitants constatent qu'il n'existe pas deux d'entre eux qui ont reçu leurs autographes précisément de la part des mêmes joueurs. Montrer qu'il existe deux habitants qui, s'ils mettent en commun leurs autographes, ont exactement un autographe de chaque joueur.

C2) Dans une tour il y a 7 ascenseurs qui s'arrêtent chacun à seulement 6 étages. Cependant, pour deux étages distincts il est toujours possible de les relier à l'aide d'un seul ascenseur.

Montrer que cette tour peut avoir au maximum 14 étages et qu'il est possible de construire une telle tour de 14 étages.

Théorie des nombres

N1) Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Soient $d_1, \ldots, d_r$ tous les diviseurs positifs de n qui sont strictement plus petits que n. Déterminer tous les n pour lesquels

$$\mathrm{ppcm}(d_1, \ldots, d_r) \neq n.$$

Remarque : pour $n = 18$ *on aurait par exemple* $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 6, d_5 = 9$ *et ainsi* $\mathrm{ppcm}(1, 2, 3, 6, 9) = 18$.

N2) Soient m et n des entiers naturels et soit p un nombre premier tels que $m < n < p$. Supposons de plus que

$$p \mid m^2 + 1 \quad \text{et} \quad p \mid n^2 + 1.$$

Montrer que

$$p \mid mn - 1.$$