OSM - Tour préliminaire 2017

Lausanne, Lugano, Zürich - 14 janvier 2017

Temps : 3 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

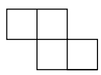
Géométrie

G1) Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$ et soit k son cercle circonscrit. La tangente à k passant par A coupe BC en P. La bissectrice de l'angle $\angle APB$ coupe AB en D et AC en E. Montrer que le triangle ADE est isocèle.

G2) Soit ABC un triangle rectangle d'hypothènuse AB. Un cercle de centre C coupe deux fois le côté AB aux points P et Q, avec P situé entre A et Q. Soit R le point sur le côté BC tel que $\angle RAC = \frac{1}{2}\angle PCQ$ et soit S le point sur le côté AC tel que $\angle CBS = \frac{1}{2}\angle PCQ$. Soient T le point d'intersection des segments CP et AR et U le point d'intersection des segments CQ et BS. Montrer que $RSTU$ est un quadrilatère inscrit.

Combinatoire

K1) Quel est le nombre maximal de Skew-Tetrominos que l'on peut placer sur un rectangle 8×9 sans recouvrement ?



Remarque : Les tetrominos peuvent être tournés et réfléchis.

K2) Soient $m, n \geq 2$ des nombres naturels. On dispose de quatre couleurs et on veut colorier chaque case d'un rectangle $m \times n$ avec une de ces couleurs de telle sorte que chaque carré 2×2 contienne les quatre couleurs. De combien de manières différentes peut-on procéder ?

Remarque : Deux colorations sont différentes dès qu'il existe au moins une case qui est coloriée différemment.

Theorie des nombres

Z1) Trouver toutes les paires (m, n) de nombres naturels vérifiant :

$$\operatorname{ppcm}(m,n) - \operatorname{pgcd}(m,n) = \frac{mn}{5}.$$

Z2) Soient a et b deux nombres naturels tels que

$$\frac{3a^2 + b}{3ab + a}$$

est un nombre entier. Quelles sont toutes les valeurs que l'expression ci-dessus peut prendre ?