Sélection IMO - 1er examen

Zürich - 7 Mai 2016

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit n un nombre naturel. On appelle une paire de nombres *insociable* si leur plus grand diviseur commun vaut 1. On répartit les nombres $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ en n paires. Quel est le nombre minimum de paires insociables qui sont ainsi formées ?

2. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que

$$(x-2)P(x+2) + (x+2)P(x-2) = 2xP(x)$$

pour tous $x \in \mathbb{R}$.

3. Soit ABC un triangle avec $\angle BCA = 90°$ et soit H le pied de la hauteur issue de C. Soit D un point à l'intérieur du triangle BCH tel que CH coupe le segment AD en son milieu. Soit P le point d'intersection des droites BD et CH. Soit ω le demi-cercle de diamètre BD qui intersecte le côté CB. La tangente à ω passant par P touche ω au point Q. Montrer que les droites CQ et AD se coupent sur ω.

Bonne chance !

Sélection IMO - 2ème examen

Zürich - 8 Mai 2016

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Trouver tous les nombres entiers $n \geq 1$ tels que pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ l'inégalité suivante soit vérifiée.

$$\left(\frac{x_1^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\right)(x_1 + \ldots + x_n) \geq 0.$$

5. Soit A un ensemble fini de nombres naturels. Une partition de A en deux sous-ensembles disjoints non-vides A_1 et A_2 est appelée *démoniaque* si le plus petit multiple commun des éléments de A_1 est égal au plus grand diviseur commun des éléments de A_2. Quel est le plus petit nombre d'éléments que A doit avoir pour qu'il existe exactement 2016 partitions démoniaques ?

6. Soit n un nombre entier naturel. Montrer que $7^{7^n} + 1$ a au moins $2n + 3$ facteurs premiers (non nécessairement distincts).
Remarque : $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ *a 3 diviseurs premiers.*

Bonne chance !

Sélection IMO - 3ème examen

Zürich - 21 Mai 2016

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

7. Trouver tous les nombres naturels n tels que

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ 1 \leq d < n}} d^2 = 5(n+1).$$

8. Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$ et soit M le milieu de BC. La bissectrice de $\angle BAC$ coupe la droite BC en Q. Soit H le pied de la hauteur en A sur BC. La perpendiculaire à AQ passant par A coupe la droite BC en S. Montrer que $MH \cdot QS = AB \cdot AC$.

9. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(f(x)+y)(f(x-y)+1) = f(f(xf(x+1)) - yf(y-1))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Bonne chance!

Sélection IMO - 4ème examen

Zürich - 22 Mai 2016

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit ABC un triangle non-rectangle avec M le milieu de BC. Soit D un point sur la droite AB tel que $CA = CD$ et soit E un point sur la droite BC tel que $EB = ED$. La parallèle à ED passant par A coupe la droite MD au point I et la droite AM coupe la droite ED au point J. Montrer que les points C, I et J sont alignés.

11. Soient m et n des nombres naturels avec $m > n$. On définit

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \text{ pour } k = 1, \ldots, n+1.$$

Montrer que si tous les x_i sont entiers, alors $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} - 1$ n'est pas une puissance de deux.

12. Lors d'un examen d'EGMO, il y a trois exercices, qui peuvent chacun apporter un nombre entier de points compris entre 0 et 7. Montrer que, parmi 49 participantes, on peut toujours en trouver deux telles que la première a au moins aussi bien réussi chacun des trois exercices que la seconde.

Bonne chance !