OSM - Tour final

Premier examen - 11 mars 2016

Temps : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit ABC un triangle avec $\angle BAC = 60°$. Soit E le point sur le côté BC tel que $2\angle BAE = \angle ACB$. Soit D la deuxième intersection de AB avec le cercle circonscrit au triangle AEC et soit P la deuxième intersection de CD avec le cercle circonscrit au triangle DBE. Calculer la mesure de l'angle $\angle BAP$.

2. Soient a, b et c les côtés d'un triangle, ce qui signifie : $a + b > c$, $b + c > a$ et $c + a > b$. Montrer que

$$\frac{ab+1}{a^2+ca+1} + \frac{bc+1}{b^2+ab+1} + \frac{ca+1}{c^2+bc+1} > \frac{3}{2}.$$

3. Déterminer tous les nombres naturels n pour lesquels il existe des nombres premiers p, q tels que l'équation suivante est vérifiée

$$p(p+1) + q(q+1) = n(n+1).$$

4. On considère 2016 points distincts dans le plan. Montrer qu'il existe au moins 45 distances différentes entre ces points.

5. Soit ABC un triangle rectangle en C et M le milieu de AB. Soit G un point situé sur le segment MC et P un point sur la droite AG tel que $\angle CPA = \angle BAC$. De plus, soit Q un point sur la droite BG tel que $\angle BQC = \angle CBA$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQG et BPG se coupent sur le segment AB.

Bonne chance !

OSM - Tour final

Deuxième examen - 12 mars 2016

Temps : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Soit a_n une suite de nombres naturels définie par $a_1 = m$ et $a_n = a_{n-1}^2 + 1$ pour $n > 1$. Une paire (a_k, a_l) est appelée *intéressante* si
   (i) $0 < l - k < 2016$
   (ii) a_k divise a_l.
Montrer qu'il existe un m tel qu'il n'existe pas de paires intéressantes pour la suite a_n.

7. On considère $2n$ points différents sur un cercle. Les nombres 1 à $2n$ sont répartis au hasard sur ces points. Chaque point est relié à exactement un autre point, de telle manière que les segments concernés ne se coupent pas. Le segment reliant les nombres a et b se voit assigner la valeur $|a - b|$. Montrer que l'on peut relier les points sans croisement de telle manière que la somme des valeurs soit n^2.

8. Soit ABC un triangle aigu et soit H son orthocentre. Soit G l'intersection de la parallèle à AB passant par H avec la parallèle à AH passant par B. Soit I le point sur la droite GH tel que AC coupe le segment HI en son milieu. Soit J la deuxième intersection de AC avec le cercle circonscrit au triangle CGI. Montrer que $IJ = AH$.

9. Soit $n \geq 2$ un nombre naturel. Pour un sous-ensemble F à n éléments de $\{1, \ldots, 2n\}$, on définit $m(F)$ comme le minimum de tous les $\mathrm{ppmc}\,(x, y)$, où x et y sont deux éléments distincts de F. Trouver la valeur maximale que peut prendre $m(F)$.

10. Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on ait

$$f(x + yf(x + y)) = y^2 + f(xf(y + 1)).$$

Bonne chance !