Sélection OIM - 1er Examen

Zürich - 2 Mai 2015

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Quel est le nombre maximal de cases 1×1 que l'on peut colorier en noir dans un échiquier $n \times n$ de telle sorte que tout carré 2×2 contienne au maximum 2 cases noires?

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a, b, c \geq 1$. Montrer que

$$\min\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}, \frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}, \frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq abc.$$

3. Soit ABC un triangle avec $AB > AC$. Soit D un point sur AB tel que $DB = DC$ et M le milieu du côté AC. La parallèle à BC passant par D coupe la droite BM en K. Montrer que $\angle KCD = \angle DAC$.

Bonne chance!

Sélection OIM - 2ème Examen

Zürich - 3 Mai 2015

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Trouver tous les nombres entiers relatifs a, b premiers entre eux tels que

$$a^2 + a = b^3 + b.$$

5. Soit ABC un triangle. Les points K, L et M se trouvent sur les segments BC, CA et AB respectivement, de telle manière que les droites AK, BL et CM se coupent en un point. Prouver qu'il est possible de choisir deux triangles parmi les triangles AML, BKM et CLK dont la somme des rayons des cercles inscrits vaut au moins le rayon du cercle inscrit du triangle ABC.

6. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x)P(x+1) = P(x^2+2).$$

Bonne chance!

Sélection IMO - 3ème examen

Zürich - 16 Mai 2015

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

7. Trouver tous les ensembles finis et non-vides A de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que :

Pour tous $f_1, f_2 \in A$, il existe $g \in A$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f_1(f_2(y) - x) + 2x = g(x + y).$$

8. Trouver tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que pour tout entier naturel n qui n'a pas de diviseur premier plus petit que 2015

$$n + c \,|\, a^n + b^n + n.$$

9. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Au centre d'un jardin circulaire se trouve une tour de garde. A la périphérie du jardin se trouvent n nains de jardin régulièrement espacés. Dans la tour se trouvent des surveillants attentifs. Chaque surveillant contrôle une portion du jardin délimitée par deux nains.
Nous disons que le surveillant A contrôle le surveillant B si la région de B est contenue dans celle de A.
Parmi les surveillants il y a deux groupes: les apprentis et les maîtres. Chaque apprenti est contrôlé par exactement un maître, et ne contrôle personne, tandis que les maîtres ne sont contrôlés par personne.
Le jardin dans son entier a les coûts d'entretien suivants:

- Un apprenti coûte 1 pièce d'or par année.
- Un maître coûte 2 pièces d'or par année.
- Un nain de jardin coûte 2 pièces d'or par année.

Montrer que les nains de jardins coûtent au moins autant que les surveillants.

Bonne chance!

Sélection IMO - 4ème examen

Zürich - 17 Mai 2015

Temps : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Supposons qu'il existe un point P dans l'intérieur du parallélogramme qui se trouve sur la médiatrice de AB et tel que $\angle PBA = \angle ADP$.
Montrer que $\angle CPD = 2\angle BAP$.

11. A Thaï-Land il y a n villes. Chaque paire de villes est reliée par une voie à sens unique qui ne peut être empruntée, selon son type, qu'à vélo ou qu'en voiture. Montrer qu'il existe une ville à partir de laquelle on peut atteindre n'importe quelle autre ville, soit à vélo, soit à voiture.

Remarque: Il n'est pas nécessaire d'utiliser le même moyen de transport pour chaque ville.

12. Soient m et n deux entiers naturels. Montrer qu'il existe un entier naturel c tel que chaque chiffre différent de 0 apparaît aussi souvent dans cm et dans cn.

Bonne chance!