

# Tour préliminaire - OSM

Lausanne, Zürich, Lugano - 11 janvier 2014

Temps : 3 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver tous les nombres naturels  $n > 1$  pour lesquels  $n - d$  est un diviseur de  $n$ , où  $d$  est le plus petit diviseur de  $n$  qui est plus grand que 1.
2. Deux cercles  $k_1, k_2$  ayant pour centres  $M_1$  resp.  $M_2$  se coupent aux points  $A$  et  $B$ . La tangente à  $k_1$  par  $A$  coupe  $k_2$  une nouvelle fois au point  $P$ . De plus, la droite  $M_1B$  coupe aussi une nouvelle fois  $k_2$  au point  $Q$ . Supposons que  $Q$  se trouve en dehors de  $k_1$  et que  $P \neq Q$ . Prouver que  $PQ$  est parallèle à  $M_1M_2$ .
3. Combien existe-t-il de nombres naturels à 8 chiffres tels que chaque chiffre est soit strictement plus grand que tous les chiffres à sa gauche, soit strictement plus petit que tous les chiffres à sa gauche ?
4. Chaque point d'un polygone régulier à 11 côtés est relié à exactement 4 autres points de ce polygone par un segment de droite. Montrer qu'on peut y ajouter un segment afin qu'au moins un triangle isocèle soit dessiné.
5. Déterminer tous les nombres premiers  $p$  tels qu'il existe des nombres naturels  $n, m$  avec

$$\frac{p^2 + 1}{p + 1} = \frac{n^2}{m^2}.$$

Bonne chance !