

Tour préliminaire - OSM

Lausanne, Zürich, Lugano - 11 janvier 2014

Temps : 3 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver tous les nombres naturels $n > 1$ pour lesquels $n - d$ est un diviseur de n , où d est le plus petit diviseur de n qui est plus grand que 1.
2. Deux cercles k_1, k_2 ayant pour centres M_1 resp. M_2 se coupent aux points A et B . La tangente à k_1 par A coupe k_2 une nouvelle fois au point P . De plus, la droite M_1B coupe aussi une nouvelle fois k_2 au point Q . Supposons que Q se trouve en dehors de k_1 et que $P \neq Q$. Prouver que PQ est parallèle à M_1M_2 .
3. Combien existe-t-il de nombres naturels à 8 chiffres tels que chaque chiffre est soit strictement plus grand que tous les chiffres à sa gauche, soit strictement plus petit que tous les chiffres à sa gauche ?
4. Chaque point d'un polygone régulier à 11 côtés est relié à exactement 4 autres points de ce polygone par un segment de droite. Montrer qu'on peut y ajouter un segment afin qu'au moins un triangle isocèle soit dessiné.
5. Déterminer tous les nombres premiers p tels qu'il existe des nombres naturels n, m avec

$$\frac{p^2 + 1}{p + 1} = \frac{n^2}{m^2}.$$

Bonne chance !