Sélection IMO 2014

Premier examen - 3 mai 2014

Zeit : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on ait

$$m^2 + f(n) | mf(m) + n.$$

2. Soient $2n$ jetons côte à côte, en ligne. Un coup consiste à échanger deux jetons voisins. Combien doit-on effectuer de coups au minimum pour que chaque jeton ait été au moins une fois au début et à la fin de la ligne ?

3. Soient 4 points dans le plan disposés de sorte que les 4 triangles qu'ils forment possèdent tous le même rayon du cercle inscrit. Montrer que les 4 triangles sont égaux.

Bonne chance !

Sélection IMO 2014

Deuxième examen - 4 mai 2014

Zeit : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$(x + 2014)P(x) = xP(x + 1).$$

5. Soit ABC un triangle dans lequel $\alpha = \angle BAC$ est le plus petit angle (strictement). Soit P un point sur le côté BC et D un point de la droite AB tel que B se situe entre A et D et $\angle BPD = \alpha$. De même, soit E un point de la droite AC tel que C se situe entre A et E et $\angle EPC = \alpha$. Montrer que les droites AP, BE et CD sont concourantes si et seulement si AP est perpendiculaire à BC.

6. Montrer qu'il n'existe pas deux nombres entiers naturels distincts tels que leur moyenne harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique soient toutes des nombres entiers naturels.

Bonne chance !

Sélection IMO 2014

troisième examen - 17 mai 2014

Temps : 4 heures 30
Chaque exercice vaut 7 points.

7. Deux cercles ω_1 et ω_2 se touchent tangentiellement en un point A et se trouvent à l'intérieur d'un cercle Ω. De plus, ω_1 touche tangentiellement Ω en un point B et ω_2 touche tangentiellement Ω en un point C. La droite AC coupe ω_1 une deuxième fois en un point D.
Montrer que le triangle DBC est rectangle si A, B et C ne sont pas alignés.

8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) - y^2) = f(x^2) + y^2 f(y) - 2f(xy)$$

9. Soit n un nombre naturel et $A = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ un ensemble de n points dans le plan tel que trois de ces points ne sont jamais alignés. Un *chemin à travers* A consiste en $n-1$ segments $P_{\sigma(i)}P_{\sigma(i+1)}$ avec $i = 1, \ldots, n-1$, où σ est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$, tel qu'aucun segment ne coupe un autre.
Montrer que le nombre de chemins distincts à travers A est minimal si et seulement si les points de A forment un n-gone convexe.

Puisse le sort vous être favorable.

Sélection IMO 2014

quatrième examen - 18 mai 2014

Temps : 4 heures 30
Chaque exercice vaut 7 points.

10. Un carré 7×7 est divisé en 49 petits carrés 1×1. Deux scarabées marchent le long des côtés des petits carrés, de manière à ce que chaque scarabée parcourt son propre chemin fermé et qu'il passe exactement une fois par chacun des 64 sommets des petits carrés.
Quel est le nombre minimal de côtés des petits carrés qui ont été parcourus par les deux scarabées ?

11. Déterminer tous les entiers naturels n avec la propriété suivante :
Pour tout premier $p < n$, $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p$ n'est pas divisible par le carré d'un nombre naturel plus grand que 1.
Remarque : Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est défini comme le plus grand entier plus petit ou égal à x.

12. Soient n un entier naturel et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers naturels. On prolonge périodiquement la suite de sorte que $a_{n+i} = a_i$ pour tout $i \geq 1$. Supposons que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_1 + n$.

(ii) $a_{a_i} \leq n + i - 1$ pour $i = 1, 2 \ldots, n$.

Montrer que :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n^2$$

Bon chance !