OSM Tour final 2014

premier examen - 14 mars 2014

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Les points A, B, C et D se trouvent dans cet ordre sur un cercle k. Soit t la tangente à k par C et s la réflexion de AB par rapport à la droite AC. Soit G l'intersection des droites AC et BD, et H l'intersection des droites s et CD. Montrer que GH est parallèle à t.

2. Soient a, b des nombres naturels tels que:

$$ab(a-b) \mid a^3 + b^3 + ab$$

Montrer que $\text{ppcm}(a, b)$ est un carré parfait.

3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ l'équation suivante est satisafaite:

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y)$$

4. On considère le plan quadrillé (feuille quadrillée infinie). Pour quelles paires d'entiers (a, b) peut-on colorier chaque case avec une couleur parmi $a \cdot b$ couleurs, de sorte que chaque rectangle de taille $a \times b$ ou de taille $b \times a$, aligné sur le quadrillage, contienne une case de chaque couleur ?

5. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombres entiers telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{d \mid n} a_d = 2^n$$

Montrer que n divise a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque: Par exemple pour $n = 6$ la condition est $a_1 + a_2 + a_3 + a_6 = 2^6$.

Bonne chance !

OSM Tour Final 2014

Deuxième Examen - 15 Mars 2014

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ avec $a + b + c = 1$. Monter que:

$$\frac{3-b}{a+1} + \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} \geq 4$$

7. Autour d'un lac rond se trouvent $n \geq 4$ villes reliées par $n - 4$ lignes de bateaux à vapeur et par une ligne de bateau à voiles. Chaque bateau assure la liaison entre deux villes non voisines et pour éviter les collisions, deux lignes ne se croisent jamais.
Pour mieux adapter les lignes au besoin des passagers, le changement suivant peut être effectué : une ligne d'un bateau quelconque peut être déplacée de telle sorte qu'elle ne croise toujours aucune des autres lignes. Ce changement modifie une seule ligne à la fois.
Soient Santa Marta et Le Cap deux villes qui ne sont pas voisines. Montrer qu'un nombre fini de changements permet de relier Santa Marta et Le Cap par la ligne de bateau à voiles.

Remarque: Il y a toujours au plus un bateau qui relie les mêmes deux villes et à aucun moment, un bateau ne relie deux villes voisines.

8. Soit ABC un triangle aigu et soit M le milieu de la hauteur h_b issue de B et soit N le milieu de la hauteur h_c issue de C. Soit ensuite P le point d'intersection de AM avec h_c et soit Q le point d'intersection de AN avec h_b. Montrer que M, N, P et Q se trouvent sur un cercle.

9. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombres définie de la manière suivante:

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & \text{si } n \text{ possède un nombre pair de diviseurs strictement supérieurs à 2014} \\ 1\,, & \text{si } n \text{ possède un nombre impair de diviseurs strictement supérieurs à 2014} \end{cases}$$

Montrer que la suite a_n ne devient jamais périodique.

10. Soit k un cercle de diamètre AB. Soit C un point sur la droite AB tel que B est entre A et C. Soit T un point sur k tel que la droite CT est tangente à k. Soit l la parallèle à CT passant par A. Soit D le point d'intersection de l avec la perpendiculaire à AB qui passe par T. Montrer que la droite DB coupe le segment CT en son milieu.

Bonne Chance !