Lösungen zur Vorrundenprüfung 2013

Zuerst einige Bemerkungen zum Punkteschema. Eine vollständige und korrekte Lösung einer Aufgabe ist jeweils 7 Punkte wert. Für Komplette Lösungen mit kleineren Fehlern oder Ungenauigkeiten, die aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Richtigkeit der dargestellten Lösung haben, geben wir 6 Punkte. Bei unvollständigen Lösungen wird der Fortschritt und der Erkenntnissgewinn bewertet (Teilpunkte). Oft gibt es mehrere Lösungen für ein Problem. Versucht jemand zum Beispiel eine Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen zu lösen, erreicht auf dem ersten Weg 3 Punkte, auf dem zweiten 2 Punkte, dann wird seine Punktzahl nicht 5, sondern 3 sein. Punkte, die auf verschiedenen Wegen erreicht werden, sind also *nicht* kumulierbar. Die unten angegebenen Bewertungsschemata sind nur Orientierungshilfe. Gibt jemand eine alternative Lösung, dann werden wir versuchen, die Punktzahl entsprechend zu wählen, dass für gleiche Leistung gleich viele Punkte verteilt werden. Die Schemata sind stets wie folgt zu interpretieren :
Kommt jemand in seiner Lösung bis und mit hierhin, dann gibt das soviele Punkte.
Ausnahmen von dieser Regel sind jeweils ausdrücklich deklariert.

Quelques remarques concernant le barème. Une solution complète et correcte d'un exercice vaut 7 points. Pour des solutions complètes avec quelques erreurs mineures ou des imprécisions qui n'ont pas d'influence essentielle sur la justesse de la solution, nous donnons 6 points. Pour des solutions incomplètes nous évaluons le progrès (points partiels). Souvent il y a plusieurs solutions pour un problème. Par exemple, si quelqu'un essaie de résoudre un exercice de deux manières différentes et obtient 3 points pour la première tentative et 2 points pour la deuxième solution incomplète, alors son total de points ne sera pas 5 mais 3. Des points obtenus pour des solutions différentes ne sont *pas* cumulable. Les barèmes données ci-dessous sont une aide à l'orientation. Si quelqu'un donne une solution alternative, nous essayerons de choisir le nombre de point juste pour que la même performance vaut le même nombre de points. Les barèmes sont à interpréter comme ceci :
Si quelqu'un arrive dans une solution jusqu'à cet endroit, alors il obtient tant de points.
Des exceptions à cette règle sont mentionnées explicitement.

1. Zuerst stellt man fest, dass es für jede Person genau eine Rotation des Tisches gibt, sodass diese Person ihr Namensschild vor sich hat. Nun lässt sich die Aufgabe mit dem Schubfachprinzip lösen. Als "Schubfächer" wählen wir 2013 verschiedenen Möglichkeiten, den Tisch zu rotieren und als "Perlen" wählen wir die 2013 Personen. Wir ordnen jede Person der Drehung zu, sodass sie beim passenden Namensschild sitzt.

Da am Anfang niemand am richtigen Platz sitzt, bleibt dieses "Schubfach" leer. Wir verteilen also 2013 Leute auf 2012 Schubfächer. Deshalb gibt es mindestens ein "Schubfach", welches mindestens zwei "Perlen" enthält. Nach unserer Definition heisst das genau, dass es mindestens eine Drehung des Tisches gibt, für welche mindestens zwei Personen das richtige Namensschild vor sich haben.

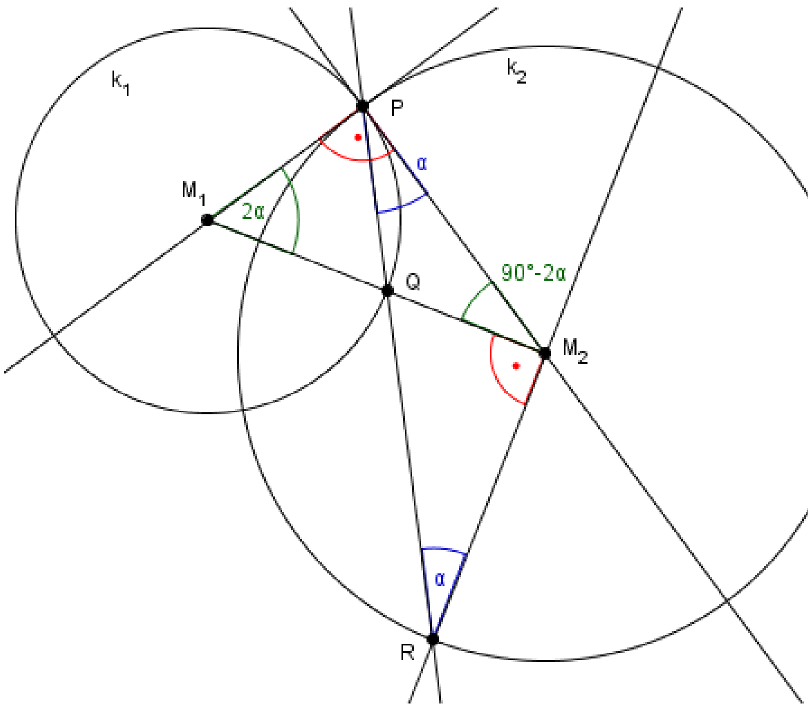
Zum Punkteschema :

Wenn man bemerkt hat, dass es für jede Person eine Drehung gibt, sodass diese Person am richtigen Platz ist, erhält man dafür einen Punkt.

Für folgende Aussage erhält man insgesamt fünf Punkte : Nehme an, dass die Aussage falsch ist. Dann sitzt bei jeder der 2013 Drehungen genau eine Person am richtigen Ort.

Für eine komplette Lösung gibt es sieben Punkte.

2. Da die Tangenten an k_1, k_2 in P senkrecht aufeinander stehen, liegen M_1 und M_2 auf ihnen. Sei R der Schnittpunkt der Senkrechten zu M_1M_2 durch M_2 und der Geraden PQ. Wir wollen zeigen, dass R auf k_2 liegt.
Wir definieren $\alpha = \angle RPM_2$. Als Mittelpunktswinkel ist $\angle QM_1P$ doppelt so gross wie der Sehnentangentenwinkel $\angle RPM_2$, also $\angle QM_1P = 2\alpha$. Mit der Innenwinkelsumme im Dreieck M_1M_2P folgt $\angle M_1M_2P = 90° - 2\alpha$. Nun folgt mit der Innenwinkelsumme im Dreieck PRM_2, dass $\angle PRM_2 = \alpha$ gilt. Dies bedeutet, dass PRM_2 ein gleichschenkliges Dreieck ist und $PM_2 = RM_2$ gilt. Hieraus folgt natürlich, dass R auf k_2 liegt, da auch schon P auf k_2 liegt.



Zum Punkteschema :
Eine sinnvolle Übersetzung der Behauptung in eine Winkelaussage gab einen Punkt, wie z.B. : "Es genügt zu zeigen, dass $\angle RPM_2 = \angle PRM_2$ gilt, da dann RPM_2 ein gleichschenkliges Dreieck ist, woraus $PM_2 = RM_2$ folgt, was wiederum impliziert, dass R auf k_2 liegt, da es P auch tut." Eine korrekte Lösung ohne die Begründung, wieso $\angle M_1PM_2 = 90°$ gilt, war 5 Punkte wert. Es ist nämlich nicht von vornherein klar, dass die Mittelpunkte auf den Tangenten in P liegen müssen. (Es musste zumindest explizit erwähnt werden, dass die Mittelpunkte M_1, M_2 auf den Tangenten liegen.) Eine grosse Fehlerquelle war, dass benutzt wurde, dass R auf k_2 liegt. Das darf man jedoch nicht, da man dies ja gerade zeigen möchte. In dieser Aufgabe war es also von Vorteil, eine ungenaue Skizze zu zeichnen, sodass R nicht auf k_2 liegt.

3. On peut commencer par décomposer les nombres sympathiques en trois parties disjointes :

X = Les nombres sympathiques qui ont uniquement des chiffres impairs.
Y = Les nombres sympathiques qui ont uniquement des chiffres pairs.
Z = Les nombres sympathiques qui ont des chiffres pairs et impairs.

On remarque que pour les nombres dans X et Y, la condition (b) est toujours satisfaite. (Car il n'y a jamais un chiffre pair et un chiffre impair.) Les nombres dans X sont avec des chiffres parmi $\{1,3,5,7,9\}$ dont tous les chiffres apparaissent au plus une fois. Parmi eux on trouve :

5 nombres qui ont exactement un chiffre.

$5 \cdot 4 = 20$ nombres qui ont exactement deux chiffres. (5 choix pour la dizaine et 4 pour l'unité.)

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ nombres qui ont exactement 3 chiffres.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ nombres qui ont exactement 4 chiffres et

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ nombres qui ont exactement 5 chiffres.
Donc $|X| = 120 + 120 + 60 + 20 + 5 = 325$.

On peut procéder de manière similaire avec les nombres dans Y qui ont des chiffres distincts dans $\{0,2,4,6,8\}$. Il faut faire attention car le chiffre le plus à gauche ne peut pas être un 0. Il y a donc

4 nombres qui ont exactement un chiffre.

$4 \cdot 4 = 16$ nombres qui ont exactement deux chiffres.

$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ nombres qui ont exactement 3 chiffres.

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ nombres qui ont exactement 4 chiffres et

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ nombres qui ont exactement 5 chiffres.
Donc $|Y| = 96 + 96 + 48 + 16 + 4 = 260$.

Il reste à compter les éléments de Z qui ont des chiffres pairs et impairs. Une première observation est que quelque part dans un tel chiffre il y a un chiffre pair A à côté d'un chiffre impair B. Entre eux il n'y a 0 autres chiffres, il faut alors que $A+B-1=0$ ou autrement dit que $A=0$ et $B=1$.

La première conséquence de cette observation est que il n'y a qu'une unique frontière entre chiffres pairs et chiffres impairs. Car sinon soit 0 soit 1 doit apparaitre deux fois dans la représentation.

Si les chiffres impairs sont à gauche des chiffres pairs. Alors entre le chiffre C avec k chiffres entre lui et 1 (s'il y en a un) satisfait

$$C/2 = k.$$

Donc du côté des chiffres pairs, on retrouve les chiffres paires en ordre croissant. Un calcul analogue montre que de l'autre côté on a les chiffres impairs en ordre croissant. Autrement dit à gauche il y a $97531, 7531, 531, 31$ ou 1 et à droite il y a $02468, 0246, 024, 02$ ou 0. Ces deux choix étant indépendants il y a $5 \cdot 5$ tels nombres.

Si en revanche les chiffres pairs sont à gauche, le même raisonnement montre que le bloc des pairs peut être $86420, 6420, 420$ ou 20 (0 n'étant pas une possibilité) et on garde 5 possibilités pour le bloc des chiffres impairs. Il y a donc $4 \cdot 5$ tels nombres.

Finalement on a $|Z| = 25 + 20 = 45$ et on arrive à un total de

$$325 + 260 + 45 = 630$$

nombres sympathiques.

Concernant le barème :

Une solution complète vaut 7 points. Une faute de multiplication ou d'addition résulte en un total de 6 points si tous les arguments de comptage sont présents et corrects.

Sinon les points (indépendants) suivants pouvaient être obtenus (si les résultats étaient justifiés correctement) :

- +1 point pour la distinction entre nombres contenant des chiffres pairs/impairs uniquement et ceux qui contiennent chiffres pairs et impairs.
- +1 point pour le comptage des nombres à chiffres impairs.
- +1 point pour le comptage des nombres à chiffres pairs.
- +1 point pour la preuve que (pour les chiffres dans Z) on a un unique bloc de chiffres pairs et un unique bloc de chiffres impairs.
- +1 point pour la preuve que depuis la 'séparation' pair/impair les chiffres sont en ordre croissant.
- +1 point pour avoir compté les nombres dans Z correctement.

4. **1. Lösung :** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $m \geq n$. Es gilt nun :

$$m^2 = \frac{m+1}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot (m-1)! + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot (n-1)! > (m-1)!$$

Nun für $m \geq 6$ ist $(m-1)! \geq (m-1) \cdot 2 \cdot (m-2) \cdot 3 = (m+m-2)\dot{(}m+2(m-3)) > m^2$. Das heisst es muss $n \leq m \leq 5$ gelten. Durchtesten aller Fälle zeigt, dass nur $(n,m) = (3,4)$ eine Lösung ist und entsprechend auch die symmetrische Vertauschung davon.

2. Lösung : Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $m \geq n$. Nehme an, dass $m \geq n+2$, so ist $(m+1)! = (m+1) \cdot m \cdot \cdots \cdot (n+1) \cdot n \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \geq (m+1) \cdot m \cdot (n+1) \cdot n > m^2 n^2$. Gilt $m = n$ so muss gelten $2(m+1)! = m^4$ nun ist $m+1 > 1$ und teilt die linke Seite, aber ist Teilerfremd zur rechten Seite - ein Widerspruch. Gilt $m = n+1$, so muss gelten : $m!(1+m+1) = m^2(m-1)^2$. Für $m \geq 5$ gilt aber $m!(m+2) \geq (m+2) \cdot m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot 2 > m^2 \cdot (m-1) \cdot (m-1+m-3) > m^2(m-1)^2$. Durchtesten von $m \leq 4$ liefert wieder die Lösungen.

Es gab 3-5 Punkte, falls man zeigen konnte, dass gilt $\max m, n \leq A$ für eine Konstante A, wobei die Anzahl Punkte davon abhing wie gross A ist. Ein Beweis für die Existenz einer solchen Zahl (ohne konkret eine anzugeben) war kein Punkt Wert.
Es gab 1-3 Punkte, falls man zeigen konnte, dass gilt $\min m, n \leq A$ oder $|m-n| \leq A$ für eine Konstante A, wobei die Anzahl Punkte davon abhing wie gross A ist. Ein Beweis für die Existenz einer solchen Zahl (ohne konkret eine anzugeben) war kein Punkt Wert. Konnte man ferner zeigen, dass $|m-n| = 1$ gelten muss oder es auf den Fall $m = n$ reduzieren konnte. So war dies 4 Punkte Wert.
War eine Ungleichung ungenügend begründet so gab dies Abzug. Desweiteren musste das Durchtesten der restlichen Fälle explizit erfolgen, denn die Zahlen wurden schnell gross.

5. Pour $n = 68$ nous pouvons choisir l'ensemble

$$S = \{33, 34, \ldots, 100\}$$

et comme la somme de trois éléments distincts de S vaut au moins $33+34+35 = 102 > 100$, aucune de ces sommes est dans S. Ceci prouve que $n \geq 69$. Il faut maintenant montrer que $n \leq 69$. Soit S un ensemble à 69 éléments.
Première solution :
Soient a, b les deux plus petits nombres dans S. Si $a+b \geq 67$ alors $b \geq 34$ et S doit contenir 67 éléments de l'ensemble $\{35, 36, \ldots, 100\}$. Contradiction. Donc $a+b \leq 66$ et parmi les 34 paires

$$(x, a+b+x) \quad x = 1, 2, \ldots 34$$

il y a au moins 32 ne contenant ni a ni b et de ces paires au plus un des nombres x, $a+b+x$ peut être dans S. Donc $|S| \leq 100 - 32 = 68$ Contradiction.

Zweite Lösung :
Sei a die kleinste Zahl und b die grösste Zahl in S. Dann gibt es in S mindestens $67-a$ Zahlen die kleiner als $b-a$ sind. Andererseits gilt aber auch $b+a \leq 132$, was äquivalent ist zu $(b-a)/2+1 \leq 67-a$. Also gibt es mit dem Schubfachprinzip mindestens zwei Zahlen in den verbleibenden Elementen von S, deren Summe $b-a$ ist. Man kann also immer die grösste Zahl aus S als Summe von drei anderen schreiben.

Concernant le barème :
Pour avoir trouvé l'exemple et en avoir déduit que $n \geq 69$ on obtient 1 point. L'exemple sans estimation pour n ou l'estimation sans l'exemple ne valent pas de points.

Dans cet exercice il était essentiellement possible d'obtenir $0, 1$ ou 7 points. Notamment on ne donnait pas de points pour des arguments qui donnaient itérativement des bornes de plus en plus petites pour la somme des deux plus petits éléments de S.