# Lösungen zur Finalrundenprüfung 2013

**1.** Falls $2, 3$ oder $5$ ein kgV sein soll, dann müssen zwei der Zahlen $a, b$ gleich oder eine davon 1 sein. Falls eine der Zahlen $a, b, c$ 1 ist, dann ist auch der ggT mit 1 gleich 1, was aber nicht in der Menge sein darf. Falls $a$ und $b$ gleich sind, dann sind sowohl $\mathrm{ggT}(a, c)$ und $\mathrm{ggT}(b, c)$ wie auch $\mathrm{kgV}(a, c)$ und $\mathrm{kgV}(b, c)$ gleich somit wären es nur noch 4 mögliche Zahlen in der Menge, aber wir brauchen 5.
Daraus folgt dass $2, 3$ und $5$ gleich $\mathrm{ggT}(a, c), \mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{ggT}(b, c)$ sind. Daraus folgt, dass jeweils zwei Zahlen durch 2 teilbar sind, und mindestens eine nicht. Selbiges für 3 und 5, so, dass nie die gleiche Zahl nicht durch $2, 3$ oder $5$ teilbar sind. also ObdA:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 = 6 \quad &| \quad a \\ 3 \cdot 5 = 15 \quad &| \quad b \\ 2 \cdot 5 = 10 \quad &| \quad c \end{aligned}$$

und $5 \nmid a,\ 2 \nmid b,\ 3 \nmid c$.
Dann soll auch

$$\mathrm{kgV}(a, b),\ \mathrm{kgV}(b, c),\ \mathrm{kgV}(a, c) \text{ gleich 30 und 60 sein.}$$

Also dürfen keine höheren Potenzen oder andere Primzahlen $a, b$ oder $c$ teilen ausser 2. dann muss gelten $4|a$ oder $4|c$, und dann $4 \nmid c$ bzw. $4 \nmid a$. Das gibt dann die beiden Lösungen

$$(a, b, c) = (12, 15, 10) \text{ oder } (6, 15, 20)$$

sowie symetrische Vertauschungen.

**2.** Aus Symmetrie können wir annehmen, dass $p_n > p_{n-1} > \cdots > p_1$ gilt. Ferner ist die rechte Seite der Ungleichung unabhängig von den Primzahlen und die linke Seite wird nur kleiner, wenn man die kleinsten $n$ Primzahlen wählt, entsprechen können wir annehmen, dass $p_i$ die $i$-te Primzahl ist. Es gilt dann folgende Ungleichung: $p_i \geq 2i - 1$, denn es gilt $2 > 1$ und jede weitere Primzahl ist ungerade und $\geq 3$ und deshalb ist für $i \geq 2$ die $i$-te Primzahl grösser oder gleich der $i$-ten ungeraden natürlichen Zahl $2i - 1$. Nach QM-AM oder Cauchy-Schwarz gilt:

$$n \cdot (p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2) \geq (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^2 > (1 + 3 + \cdots + 2n - 1)^2 = n^4$$

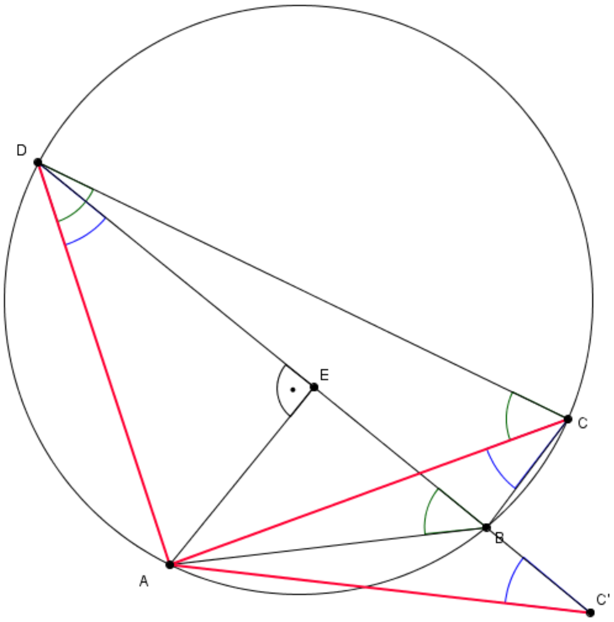
Wobei wir benutzt haben, dass $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$ gilt. Dies folgt aus einer einfachen Induktion. Für $n = 1$ sind beide Seiten 1. Nehme nun an die Identität gelte für $n$, so gilt $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, also gilt die Identität auch für $n + 1$.

**3.** Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle DCA = \angle DBA = \angle ADC$, woraus $AD = AC$ folgt. Sei $C'$ die Spiegelung von $C$ an $AB$. Da sich gegenüberliegende Winkel in einem Sehnenviereck auf $180°$ ergänzen, gilt nun

$$\angle ABC' + \angle ABD = \angle ABC + \angle ADC = 180°,$$

das heisst $D, B$ und $C'$ liegen auf einer Geraden. Ausserdem gilt $\angle BC'A = \angle BCA = \angle BDA$, also ist $AC'D$ ein gleichschenkliges Dreieck und $E$ gerade der Mittelpunkt der Seite $C'D$. Damit folgt nun:

$$DE = EC' = EB + BC' = EB + BC.$$




**4.** Einsetzen von $x = y + 1$ liefert

$$f(1) = 1 - (y+1)f(2y+1) \Leftrightarrow f(2y+1) = \frac{2(1-f(1))}{(2y+1)+1}.$$

Das heisst es gilt für alle $x > 1$:

$$f(x) = \frac{2(1-f(1))}{x+1}.$$

Einsetzen von $x > y + 1 > 1$ liefert:

$$\frac{c(y+1)}{x+y+1} = \frac{(1-c)x+y+1}{x+y+1} \Leftrightarrow (c-1)(y+x+1) = 0$$

Wobei $c = 2(1 - f(1))$ und es folgt $c = 1$. Wir wissen nun, dass für alle $x > 1$ gilt:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}. \tag{1}$$

Nehme nun an (1) gelte für alle $x > \frac{1}{n}$, wobei $n$ eine natürliche Zahl ist. Einsetzen von $y = \frac{1}{n}$ und $x = \frac{n+1}{n}z$, wobei $z > \frac{1}{n+1}$ zeigt:

$$f(z) = 1 - \frac{n+1}{n}z \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n}(z+1)} = \frac{1}{z+1} \text{ für alle } z > \frac{1}{n+1}$$

Mit Induktion über $n$ folgt nun, dass (1) gilt für alle $x > 0$, denn für jede Zahl $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ sodass $x > \frac{1}{n}$ gilt. Einsetzen zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

**5.** **1. Lösung:**

Zuerst beobachten wir, dass für beliebige 2 Studenten die die Mengen $A$ und $B$ ausgewählt haben, gibt es einen Studenten(möglicherweise einer dieser beiden) der sowohl die Menge $A$ wie auch $B$ schneidet.

Es gibt (inkl. $A$) min. $n + 1$ Studenten deren Mengen sich mit $A$ schneiden, das selbe gilt für B. Da es nur $2n + 1$ Studenten gibt, folgt nach Schubfachprinzip, dass ein Student sowohl $A$ wie auch $B$ schneidet. Nun wählen wir als $A$ die Menge mit dem minimalen grössten Element und $B$ als die Menge mit dem maximalen kleinsten Element. (falls $A$ gleich $B$ schneiden sich offensichtlich alle Mengen miteinander)

Nun haben wir eine Menge $S$ die sowohl $A$ und auch $B$ schneidet. Aber gleichzeitig schneidet $S$ alle anderen Mengen. Dies gilt weil jede andere Menge min. ein Element zwischen dem max. von A und dem min. von $B$ hat, nach Wahl von $A$ und $B$.

**2. Lösung:**

Wir ordnen die ausgewählten Mengen der Studenten nach der Grösse ihrer kleinsten Elemente. Also seien die kleinsten Elemente der Mengen $M_i$ gleich $x_i$, dann soll gelten

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{2n+1}$$

Nun gilt auch, falls $i < j$ und $M_i$ schneidet $M_j$, dann schneidet $M_i$ auch alle $M_l$ für alle $i \leq l \leq j$.

Nun da $M_1$ mindestens n andere Mengen schneidet, schneidet es auch mindestens $M_{n+1}$, und somit auch alle $M_i$ für $1 \leq i \leq n + 1$. Das gleiche gilt für alle Mengen $M_1$ bis $M_{n+1}$, welche sich also alle gegenseitig schneiden.

Um den Beweis abzuschliessen betrachten wir die Menge $M_{2n+1}$. Diese Menge schneidet mindestens $n$ andere Mengen. Da zwischen $M_{n+2}$ und $M_{2n}$ nur $n - 1$ Mengen befinden muss sich $M_{2n+1}$ mit mindestens einer Menge aus $M_1$ bis $M_{n+1}$ schneiden. Diese Menge, nennen wir sie $M_i$ schneidet sich dann offensichtlich mit allen anderen anderen Mengen, also ist sie unsere Gesuchte Menge.

**6.** On considère la différence $m - n$ modulo 2 et on remarque qu'elle est invariante sous les deux opérations: Enlever $k$ pièces de chaque pile transforme la différence en

$$(m - k) - (n - k) = m - n.$$

Multiplier une des deux piles par trois change la différence en

$$3m - n \equiv m - n \bmod 2.$$

De même $m - 3n \equiv m - n$ modulo 2. Donc si la différence est 1 modulo 2, il est impossible d'enlever toutes les pièces puisque $0 - 0 \equiv 0$ modulo 2.

Il reste à montrer que si $m \equiv n$ modulo 2 alors on peut se débarasser de toutes les pièces. Sans perte de généralité $1 \leq m \leq n$ et en enlevant $m - 1$ pièce des deux piles nous arrivons à la configuration $(1, x)$ avec $x$ impair. Si $x > 1$ on utilise la combinaison d'opérations *multiplier la première pile avec* 3 *puis enlever* 2 *de chaque pile* pour arriver à $(1, x - 2)$. En répétant cette combinaison on arrive à $(1, 1)$. Finalement on enlève une pièce des deux côtés et on a fini.

**7.** Sei $M$ der Schnittpunkt von $BC$ und $ST$. Da die Punkte $S, M$ und $T$ auf einer Geraden liegen, können wir Menelaos anwenden:

$$\frac{AS}{SB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CT}{TA} = 1 \text{ (ohne gerichtete Strecken).}$$

Wenn wir nun zeigen können, dass $\frac{AS}{SB} \cdot \frac{CT}{TA} = 1$ gilt, sind wir fertig.
Da $O$ der Umkreismittelpunkt im Dreieck $ABC$ ist, gilt:

$$\angle ASO = \angle ACO = \angle CAO = \angle TAO$$

$$\angle OAS = \angle OAB = \angle OBA = \angle OTA$$

Die Dreiecke $ASO$ und $AOT$ sind also ähnlich und es gilt:

$$\frac{AS}{TA} = \frac{AO}{TO}$$

Mit dem Aussenwinkelsatz erhalten wir:

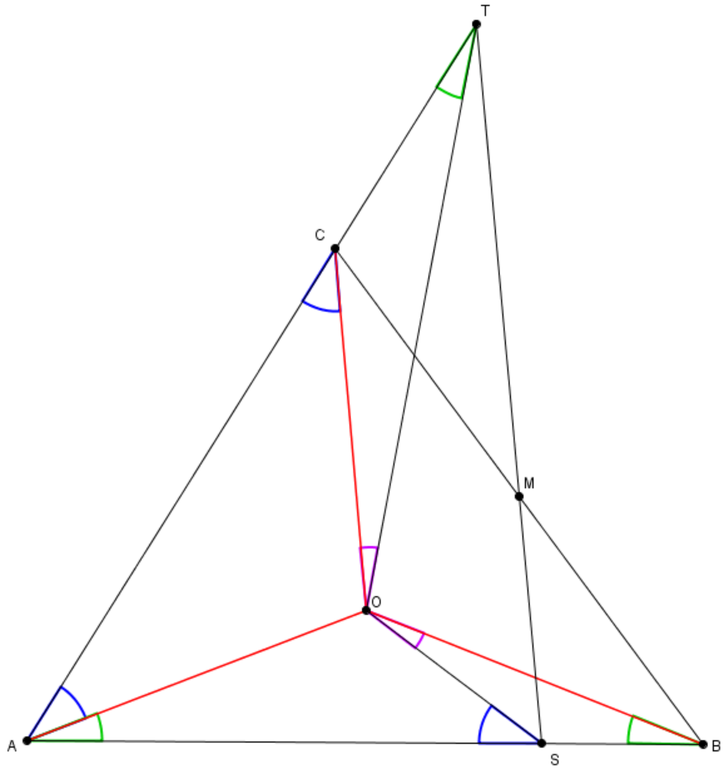
$$\angle SOB = \angle ASO - \angle SBO = \angle ACO - \angle CTO = \angle COT$$

Zusammen mit $\angle SBO = \angle CTO$ folgt, dass auch die Dreiecke $SBO$ und $COT$ ähnlich sind und es muss gelten:

$$\frac{CT}{SB} = \frac{TO}{BO}$$

Nun können wir das gewünschte Resultat erhalten:

$$\frac{AS}{SB} \cdot \frac{CT}{TA} = \frac{AS}{TA} \cdot \frac{CT}{SB} = \frac{AO}{TO} \cdot \frac{TO}{BO} = \frac{AO}{BO} = 1.$$




**8. 1. Lösung:**

Es gilt:

$$a^2 \cdot \frac{a-b}{a+b} + a^2 = \frac{2a^3}{a+b}.$$

Das heisst es ist äquivalent zu zeigen, dass gilt:

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Nach Cauchy-Schwarz gilt nun aber:

$$\left(\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a}\right)(a(a+b)+b(b+c)+c(c+a)) \geq \left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Es genügt also noch zu zeigen, dass folgedes gilt:

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+ab+b^2+bc+c^2+ca.$$

Dies gilt jedoch nach AM-GM:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab.$$

**2. Lösung:**
Es gilt nach AM-GM:
$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{a(a+b)}{4} \geq 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2.$$
Und entsprechend genügt es wieder zu zeigen, dass folgendes gilt:
$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + ab + b^2 + bc + c^2 + ca.$$

**3. Lösung:**
Da die Ungleichung homogen vom Grad 2 ist können wir annehmen, dass $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ gilt. Dann folgt mit gewichtetem AM-HM:
$$a^2 \cdot \frac{a}{a+b} + b^2 \cdot \frac{b}{b+c} + c^2 \cdot \frac{c}{c+a} \geq \frac{1}{a^2 \cdot \frac{a+b}{a} + b^2 \cdot \frac{b+c}{b} + c^2 \cdot \frac{c+a}{c}}.$$
Und auch hier genügt es wieder zu zeigen, dass folgendes gilt:
$$2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + ab + b^2 + bc + c^2 + ca.$$

**9.** Umformen und faktorisieren gibt $p^m = n^3 + q^3 = (n+q)(n^2 - nq + q^2)$. Da $p$ eine Primzahl ist müssen die beiden Faktoren rechts auch Potenzen von $p$ sein, aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Also $n + q = p^x$ und $n^2 - nq + q^2 = p^y$ mit $x + y = m$. Es gilt nun:
$$\begin{aligned} p^y - p^x = n^2 - nq + q^2 - n - q &= \left(n - \frac{q+1}{2}\right)^2 + q^2 - q - \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 \\ &= \left(n - \frac{q+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3q(q-2) - 1\right) \end{aligned}$$
Für $q \geq 3$ oder für $q = 2$ und $n \geq 2$ gilt $p^y \geq p^x$ und damit $y \geq x$ und folglich $n+q = p^x | p^y = n^2 - nq + q^2$. Es folgt nun, dass
$$n + q | n^2 - nq + q^2 - (n+q)^2 + 3q(n+q) = 3q^2$$
Das heisst $n + q \in \{1, 3, q, 3q, q^2, 3q^2\}$.

- $n + q = 1$ geht nicht, da die linke Seite mindestens 3 ist.
- Aus $n + q = 3$ folgt $n = 1, q = 2$ und damit $p = 3, m = 2$ und somit ist der Fall $q = 2, n = 1$ auch schon aus dem Weg.
- $n + q = q$ geht nicht, da $n = 0$ folgt.
- Aus $n + q = 3q$ folgt $n = 2q$ und somit $p^m = 3^2 q^3$ und ferner $p = q = 3$ und $m = 5$.
- Aus $n + q = q^2$ folgt $n = q^2 - q$ und $p^m = q^3((q-1)^3 + 1) = q^4(q^2 - 3q + 3)$. Das heisst entweder gilt $q|3$ oder $q^2 - 3q + 3 = 1$. Im ersten Fall gilt $p = q = 3, m = 5$ und im zweiten Fall ist $q$ entweder 1 oder 2. 1 ist keine Primzahl, also gilt $q = 2$ und $p = 2, m = 4$.

- Aus $n+q=3q^2$ folgt $n=3q^2-q$ und $p^m = q^3((3q-1)^3+1) = 3^2q^4(3q^2-3q+1)$ somit $q=3$ und $p^m = 3^6 \cdot 19$ ein Widerspruch.

Somit sind $(p,q,m,n) = (3,2,2,1), (3,3,5,6), (2,2,4,2)$ alle Lösungen.

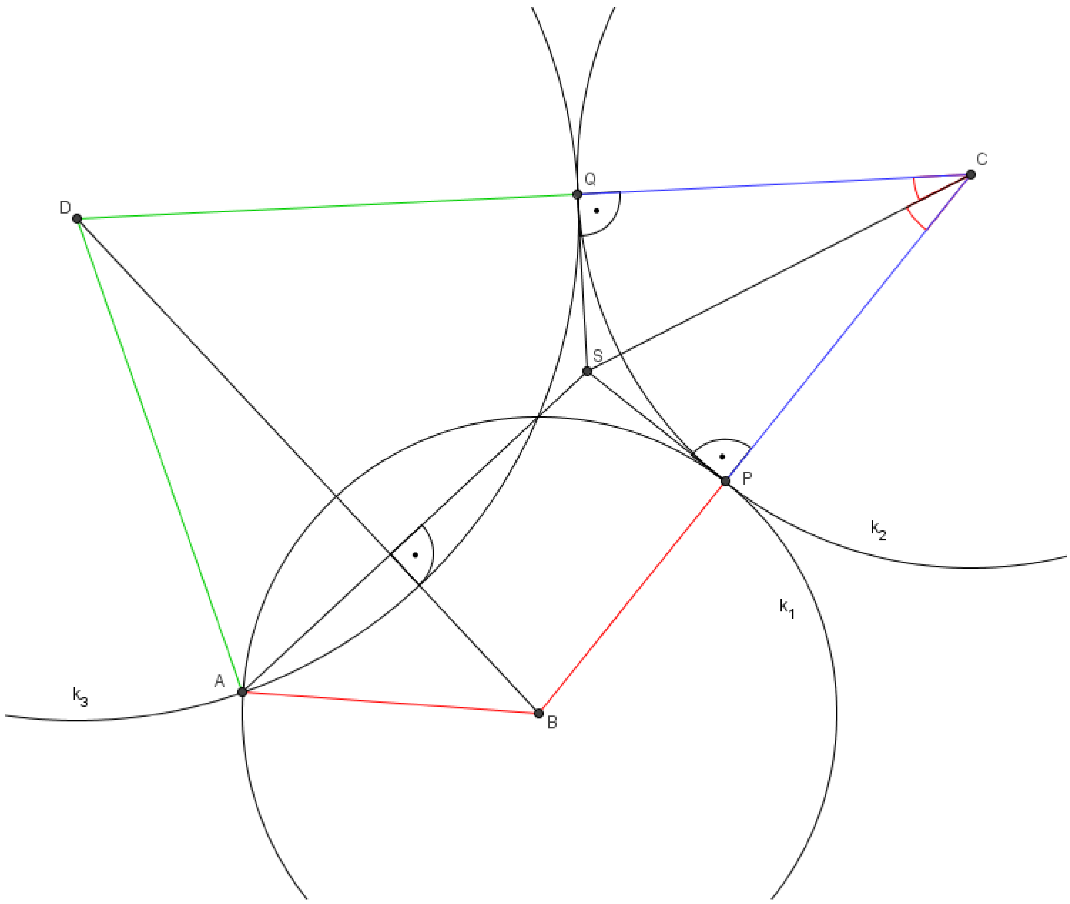
**10.** Da $ABCD$ ein Tangentenviereck ist, gilt $AB+CD = BC+DA$. Wegen $BC > AB$ gilt auch $CD > DA$ und wir können auf der Strecke $CD$ einen Punkt $Q$ definieren mit $DQ = DA$. Nun gilt:

$$CQ = CD - DQ = CD - DA = BC - AB = BC - BP = PC.$$

Wir können also die folgenden drei Kreise einzeichnen:

- Einen Kreis $k_1$ um $B$, der durch $A$ und $P$ verläuft
- Einen Kreis $k_2$ um $C$, der durch $P$ und $Q$ verläuft
- Einen Kreis $k_3$ um $D$, der durch $Q$ und $A$ verläuft

Wir beobachten, dass die Senkrechten durch $P$ und $Q$ zu $BC$ beziehungsweise $CD$ gerade den Potenzlinien der Kreise $k_1$ und $k_2$ beziehungsweise $k_2$ und $k_3$ entsprechen, da sich diese Kreise in $P$ und $Q$ berühren. Sei $S$ der Schnittpunkt dieser beiden Potenzlinien. Da $S$ dieselbe Potenz an $k_1$ wie an $k_2$ und dieselbe Potenz an $k_2$ wie an $k_3$ besitzt, hat $S$ auch dieselbe Potenz an $k_1$ wie an $k_3$. Hieraus folgt, dass $S$ auch auf der Potenzlinie der Kreise $k_1$ und $k_3$ liegt.
Betrachte nun die Senkrechte durch $A$ zu $BD$. Sie führt durch einen der Schnittpunkte der beiden Kreise $k_1$ und $k_3$ (nämlich $A$) und steht senkrecht auf der Verbindungsstrecke der beiden Kreismittelpunkte. Dies bedeutet aber gerade, dass sie die Potenzlinie an die beiden Kreise $k_1$ und $k_3$ ist und somit liegt $S$ auf ihr.
Da $PC = CQ$ gilt und die Strecken $SP$ und $SQ$ senkrecht auf $PC$ beziehungsweise $CQ$ stehen, liegt $S$ auch auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BCD$.
Die drei gegebenen Geraden schneiden sich somit im Punkt $S$.



D
Q
C
S
P
k2
k1
A
k3
B