OSM - Examen préliminaire

Lugano, Lausanne, Zurich - le 14 janvier 2012

Durée : 3 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver toutes les paires (m, n) de nombres naturels tels que $(m+1)(n+2)$ est divisible par mn.

2. Considérons $6n$ jetons de $2n$ couleurs, tels qu'il y a exactement 3 jetons de chaque couleur. Ces jetons doivent être répartis en deux piles A et B de taille égale de sorte que aucune pile ne contienne trois jetons de la même couleur. Combien y a-t-il de manières de le faire si

a) l'ordre des jetons à l'intérieur d'une pile ne joue aucun rôle ?

b) l'ordre est important ?

3. Soient A et B les points d'intersection de deux cercles k et l centrés en K et L respectivement. Soient M et N les points d'intersection de k respectivement l avec une droite passant par A, de sorte que A se trouve entre M et N. Soit D le point d'intersection des droites MK et NL. Montrer que les points M, N, B et D se trouvent sur un cercle.

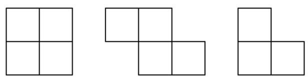
4. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite arithmétique de nombres entiers. Supposons que pour tout $1 \leq k \leq 50$ le nombre a_k est divisible par k.

a) Montrer que a_{51} est divisible par 51 et que a_{52} est divisible par 52.

b) Est-ce que a_{53} est toujours divisible par 53 ?

La suite $a_1, a_2, \ldots$ est arithmétique si la différence $a_{i+1} - a_i$ est la même pour tout i.

5. Un damier de taille 11×11 doit être recouvert complètement et sans chevauchement par des pièces de taille 2×2, par des Skew-tetrominos et par des L-triominos. Il est permis d'appliquer des rotations et des symétries aux pièces. De combien de L-triominos a-t-on besoin au minimum ?



Bonne chance !