Lösungen zur IMO Selektion 2012

1. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Finde in Abhängigkeit von n die grösste natürliche Zahl d, sodass eine Permutation $a_1, a_2, \dots, a_n$ der Zahlen $1, 2, \dots, n$ existiert mit

$$|a_i - a_{i+1}| \geq d, \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Lösung
Wir betrachten zuerst den Fall wo n ungerade ist, also $n = 2k+1$.
Dann gilt für jedes $m \in \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ sicher $|k+1-m| \leq k$, also $d \leq k$. Mit der folgenden Permutation sehen wir, dass $d = k$ auch möglich ist:

$$\begin{aligned} a_{2i+1} &= k+1+i, \text{ für } i = 0, 1, \dots, k \\ a_{2i} &= i, \text{ für } i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

Sei nun n gerade, also $n = 2k$.
Nun gilt für alle $m \in \{1, 2, \dots, 2k\}$ die Abschätzung $|k-m| \leq k$, also $d \leq k$. Mit der folgenden Permutation sehen wir, dass $d = k$ auch möglich ist:

$$\begin{aligned} a_{2i+1} &= k+1+i, \text{ für } i = 0, 1, \dots, k-1 \\ a_{2i} &= i, \text{ für } i = 1, 2 \dots, k \end{aligned}$$

2. Eine ganze Zahl m ist eine *echte Potenz*, falls es positive ganze Zahlen a und n gibt, sodass $n > 1$ und $m = a^n$.

(a) Zeige, dass es 2012 verschiedene positive ganze Zahlen gibt, sodass sich keine nichtleere Teilmenge davon zu einer echten Potenz aufsummiert.

(b) Zeige, dass es 2012 verschiedene positive ganze Zahlen gibt, sodass sich jede nichtleere Teilmenge davon zu einer echten Potenz aufsummiert.

Lösung

(a) Sei p eine Primzahl, welche grösser als 2012^2 ist, dann erfüllen die Zahlen $p, 2p, \dots, 2012p$ die Bedingung. Sei B nun eine nicht leere Teilmenge der Zahlen, dann teilt p die Summe $\sum_{b \in B} b$ aber $\sum_{b \in B} b < 2012 \cdot 2012p < p^2$ und somit nicht durch p^2 teilbar, also sicherlich keine echte Potenz.

(b) Behauptung: es existiert ein $a \geq 1$, sodass $a, 2a, \dots, 2012a$ die Bedingung erfüllt. Für jede nicht leere Teilmenge $B \subseteq \{1, 2, \dots, 2012\}$ bezeichne mit $s_B = \sum_{b \in B} b$, zudem wähle für jede solche solche Menge B eine Primzahl p_B, sodass alle paarweise verschieden sind. Nach dem chinesischen Restsatz gibt es für jedes B eine natürliche Zahl a_B, sodass $p_{B'} | a_B$ für $B' \neq B$ und $p_B | a_B + 1$. Dann erfüllt $a = \prod_{\emptyset \neq B \subseteq \{1,2,\dots,2012\}} s_B^{a_B}$ die Bedingung, denn es gilt:

$$\sum_{b \in B} ab = a s_B = \left[s_B^{\frac{a_B+1}{p_B}} \prod_{\substack{B' \subseteq \{1,2,\dots,2012\} \\ B' \neq \emptyset, B}} s_{B'}^{\frac{a_{B'}}{p_B}} \right]^{p_B}$$

3. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreis k. Sei S der Schnittpunkt von AB und CD und T der Schnittpunkt der Tangenten an k in A und C. Zeige, dass $ADTS$ genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn BD die Strecke AC halbiert.

Lösung

Wir betrachten zuerst den Fall, dass T auf derselben Seite von AC liegt wie D:

Nach dem Tangentenwinkelsatz gilt $\angle TAD = \angle DCA$. Wir erhalten:
$ADTS$ Sehnenviereck $\Leftrightarrow \angle TSD = \angle TAD \Leftrightarrow \angle TSD = \angle DCA \Leftrightarrow TS \parallel CA$
Es genügt also zu zeigen, dass TS und CA genau dann parallel sind, wenn BD die Strecke AC halbiert. Vorerst wollen wir aber noch den Punkt U als Schnittpunkt von AD und BC definieren. Wegen Pascal am Sehnensechseck $AABCCD$ liegen S, T, U auf einer Geraden.

Wenn SU und AC parallel sind, halbiert BD die Strecke AC:
Wir wollen einige Winkel ausrechnen:
$\angle DBA = \angle DCA = \angle DST$, $\angle DBC = \angle DAC = \angle DUT$
Sei P der Schnittpunkt von SU und BD. Betrachte die Umkreise der Dreiecke SBD und DBU. Wegen $\angle USD = \angle DBS$ und $\angle SUD = \angle UBD$ ist SU eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise. Man beachte nun, dass P auf dieser Tangente liegt, aber auch auf der Potenzlinie der beiden Kreise. Somit folgt $PS = PU$, was wegen der Parallelität von SU und AC auch sofort die gewünschte Aussage liefert.

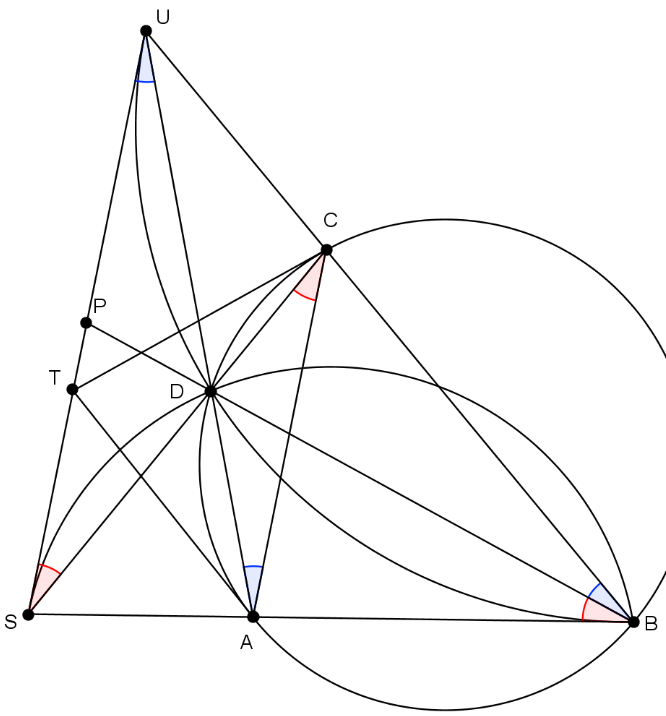

Abbildung 1: Aufgabe 3

Wenn BD die Strecke AC halbiert, sind AC und SU parallel:
Sei Q der Schnittpunkt von AC und BD. Wir betrachten die Spiegelung des Dreiecks ACD am Punkt Q. Dabei kommt A' auf C, C' auf A und D' auf BD zu liegen und

es gilt $AD' \parallel DC$ und $D'C \parallel AD$. Aus dem Strahlensatz folgt: $\frac{AB}{SB} = \frac{D'B}{DB} = \frac{CB}{UB}$
Mit der Umkehrung des Strahlensatzes folgt nun, dass SU und AC parallel sind.

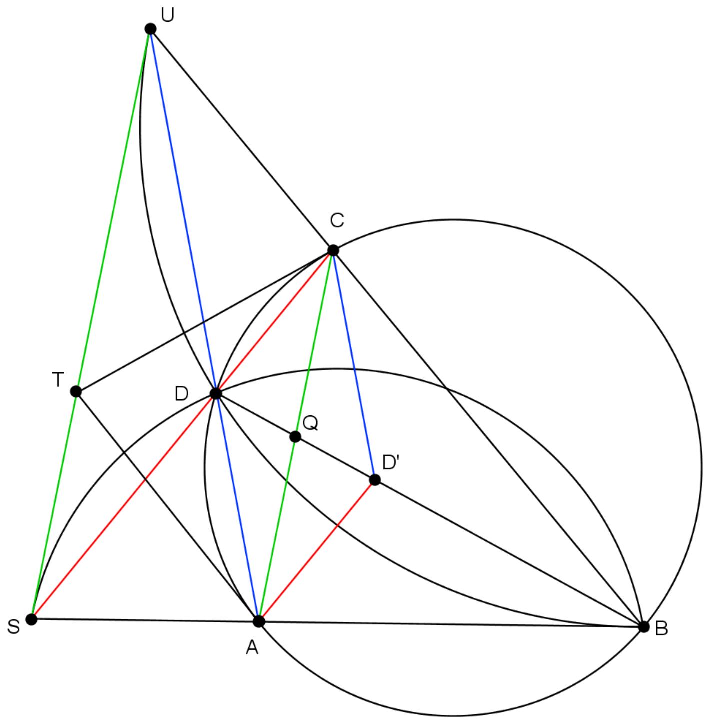

Abbildung 2: Aufgabe 3

Wir müssen noch den Fall behandeln, dass T auf derselben Seite von AC liegt wie B. Wir führen wieder den Punkt U wie oben ein. Es gilt (wegen der Potenz von U an die Umkreise der Sehnenvierecke $ADTS$ und $ABCD$):
$ADTS$ Sehnenviereck $\Leftrightarrow UA \cdot UD = UT \cdot US \Leftrightarrow UB \cdot UC = UT \cdot US \Leftrightarrow BTSC$ Sehnenviereck
Nun können wir analog zum ersten Fall vorgehen.

4. Im Dreieck ABC sei $\angle BAC = 60°$. Sei E ein Punkt auf der Geraden AB, sodass B zwischen A und E liegt und $BE = BC$ gilt. Analog sei F ein Punkt auf AC, sodass C zwischen A und F liegt und $CF = BC$ gilt. Der Umkreis von ACE schneide EF in K. Zeige, dass K auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ liegt.

Lösung
Sei S der Schnittpunkt von BF und CE. Es gilt (Aussenwinkelsatz, $BE = BC = CF$):
$\angle CSF = \angle BCS + \angle CBS = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(180° - \angle CAB) = 60°$
Hieraus folgt, dass $ABSC$ ein Sehnenviereck ist. Dies nutzen wir jetzt aus:
$\angle ABF = 180° - \angle ACS = 180° - AKE = \angle AKF$
$ABKF$ ist also ebenfalls ein Sehnenviereck. Ausnutzung der Sehnenvierecke $AEKC$ und $ABKF$ liefert $\angle BEK = \angle FCK$ und $\angle KBE = \angle KFC$. Zusammen mit $BE = FC$ folgt, dass die Dreiecke BEK und FCK kongruent sind, also gilt $KE = KC$. Damit erhalten wir:
$\angle CAK = \angle CEK = \angle KCE = \angle KAE$
Somit haben wir gezeigt, dass K auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ liegt.

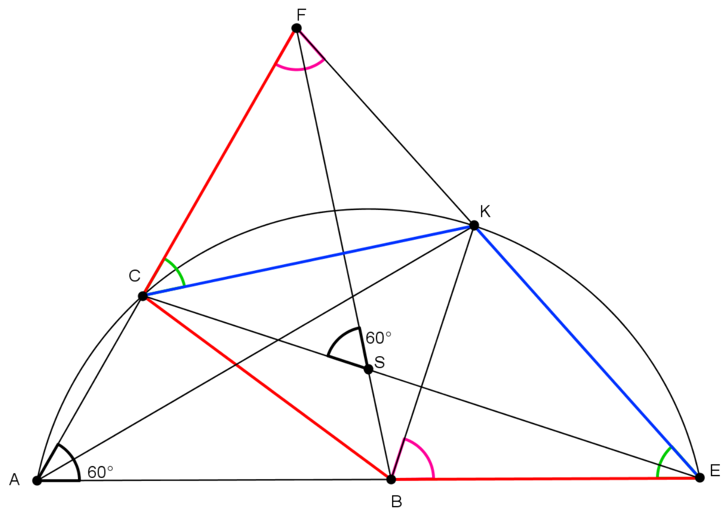

Abbildung 3: Aufgabe 4

5. Sei $n \geq 6$ eine natürliche Zahl. Betrachte eine Menge S von n verschiedenen reellen Zahlen. Beweise, dass es mindestens $n-1$ verschiedene zweielementige Teilmengen von S gibt, sodass das arithmetische Mittel der beiden Elemente in jeder dieser Teilmengen mindestens gleich dem arithmetischen Mittel aller Elemente in S ist.

Lösung Mit *Paar* meinen wir im folgenden eine zweielementige Teilmenge von S. Betrachte zuerst den Fall $n = 6$, also $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$ und o.B.d.A $x_1 < x_2 < \cdots < x_6$. Mit M bezeichnen wir das arithmetische Mittel der Elemente aus S. Dann gilt sicher eine der folgenden Ungleichungen:

$$x_1 + x_6 \geq 2M, x_2 + x_5 \geq 2M, \text{oder } x_3 + x_4 \geq 2M,$$

andernfalls wäre $6M = x_1 + \ldots x_6 < 6M$. Weiter folgt natürlich aus $x_i + x_j \geq 2M$ auch $x_k + x_l \geq 2M$ für $k \geq i$ und $l \geq j$. Somit kann man in jedem der drei Fälle nachprüfen, dass mindestens 5 Paare eine arithmetisches Mittel grösser M haben.
Wir nehmen nun an, die Aussage gelte für alle natürlichen Zahlen kleiner n und betrachten $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ und. Sie M wieder das arithmetische Mittel der x_i's. Eine kleine Rechnung (z.B. mit Fallunterscheidung g gerade/ungerade) zeigt für $n \geq 6$ folgende Ungleichung:

$$\frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{2} \geq n - 1.$$

D.h. wenn mehr als die Hälfte der Elemente grössergleich M sind, sind wir fertig. Wir betrachten also noch den Fall wo mindestens die Hälfte der Elemente kleiner als M ist. Dann gibt es Elemente $x_i < M \leq x_j$ mit $x_i + x_j \geq M$, sonst würde wie im Fall $n = 6$ folgen, dass $nM < nM$ ist. Betrache nun die Menge $s' = S \setminus \{x_i\}$. Das arithmetische Mittel der Elemente aus S' ist sicher grösser als M und nach Induktionsvoraussetzung finden wir somit $n-2$ verschiedene Paare mit Mittel grössergleich M. Zusammen mit dem Paar $\{x_i, x_j\}$, welches nicht unter diesen $n-2$ Paaren ist, haben wir also $n-1$ Paare mit Mittel grössergleich M gefunden.

6. Finde alle surjektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y)$$

1. Lösung

Sei $a \in f^{-1}(0)$, solch ein a existiert sicher, da f surjektiv ist. Einsetzen von $x = y = a$ führt zu $f(2a) = 0$. Setzt man nun $x = a, 2a$ ein so erhält man $f(a + 2f(y)) = f(2y) = f(2a + 2f(y))\ \forall y$, da f surjektiv ist folgt, dass f periodisch mit Periode a ist, insbesondere gilt $f(0) = 0$ und damit $f(2f(y)) = f(2y)\ \forall y$. Sei $b(x)$ sodass $2f(b(x)) = x - f(x)$ gilt. Einsetzen von $y = b(x)$ führt zu

$$0 = f(2b(x)) = f(2f(b(x))) = f(x - f(x)) \quad \forall x$$

Das heisst f besitzt Periode $x - f(x)$ für jedes x und somit $f(x) = f(f(x))\ \forall x$, da f surjektiv ist gilt also $f(x) = x\ \forall x$ und dies ist offensichtlich eine Lösung.

2. Lösung

Wir zeigen $f(0) = 0$ gleich wie oben. Damit erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(2f(x)) &= f(2x) \\ f(x + f(x)) &= f(2x). \end{aligned} \tag{1}$$

Damit lässt sich die urspüngliche Gleichung schreiben als

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(x + f(x)) + f(2f(y)).$$

Da f surjektiv ist können wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $y \in \mathbb{R}$ so wählen, dass $2f(y) = x + f(x)$. Einsetzen liefert

$$f(2(x + f(x))) = 2f(x + f(x)) = 2f(2x).$$

Andererseits folgt mit den Gleichungen (1) aber auch

$$f(2(x + f(x))) = f(2f(x + f(x))) = f(2f(2x)).$$

Wir verwenden noch einmal die Surjektivität von f um zu sehen, dass für jedes $z \in \mathbb{R}$ ein x mit $a = 2f(2x)$ existiert. Wenn wir nun die beiden letzten Gleichungen vergleichen sehen wir also $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{R}$, was offensichtlich eine Lösung ist.

7. Seien p, q zwei Primzahlen mit

$$pq \mid 2012^{p+q-1} - 1.$$

Zeige, dass genau eine der Primzahlen 2011 ist.

Lösung Offensichtlich sind p, q zu 2012 teilerfremd. OBdA $p \leq q$. Es gilt $p | pq | 2012^{p+q-1} - 1$ und $p | 2012^{p-1} - 1$, also $p \mid \mathrm{ggT}\{2012^{p+q-1} - 1, 2012^{p-1} - 1\} = 2012^{\mathrm{ggT}\{p+q-1, p-1\}} - 1 = 2012^1 - 1 = 2011$, da $\mathrm{ggT}\{p + q - 1, p - 1\} = \mathrm{ggT}\{q, p - 1\} = 1$. Nun ist 2011 prim, d.h. $p = 2011$. Sei nun also $p = q = 2011$, dann müsste gelten $0 \equiv \frac{2012^{2\cdot 2011-1}-1}{2012-1} = 1 + 2012 + \cdots + 2012^{2\cdot 2011-2} \equiv 2 \cdot 2011 - 1 \not\equiv 0 \operatorname{mod}(2011)$.
Bemerkung: Dabei haben wir folgendes Beispiel aus dem Skript verwendet, welches man an der Prüfung nicht zeigen musste:

Lemma 1. *Für positive ganze Zahlen n, a, b gilt*

$$\operatorname{ggT}(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\operatorname{ggT}(a,b)} - 1.$$

8. Seien f, g zwei Polynome mit ganzen Koeffizienten und seien a, b ganzzahlige Fixpunkte von $f \circ g$. Beweise, dass ganzzahlige Fixpunkte c, d von $g \circ f$ existieren mit $a + c = b + d$.
Hinweis: Für zwei Polynome p, q ist $p \circ q$ durch $(p \circ q)(x) = p(q(x))$ definiert.

Lösung Setze $c = g(a)$ und $d = g(b)$, dann sind c, d ganze Fixpunkte von $g \circ f$. Falls nun $a = b$ gilt, sehen wir sofort, dass die Gleichung erfüllt ist. Für $a \neq b$ gilt nun $a - b|g(a) - g(b) = c - d|f(c) - f(d) = a - b$, und da es sich um ganze Zahlen handelt, muss $|a - b| = |c - d|$ gelten. Folglich gilt entweder $a + d = b + c$ oder $a + c = b + d$.

9. Bestimme die grösste natürliche Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: Die Menge der natürlichen Zahlen kann so in k disjunkte Teilmengen $A_1, \dots, A_k$ aufgeteilt werden, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 15$ für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ als Summe zweier verschiedener Elemente aus A_i schreiben lässt.

Lösung Für $k = 3$ kann man die natürlichen Zahlen wie folgt aufteilen:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 2, 3\} \cup \{3m | m \geq 4\} \\
A_2 &= \{4, 5, 6\} \cup \{3m - 1 | m \geq 4\} \\
A_3 &= \{7, 8, 9\} \cup \{3m - 2 | m \geq 4\}
\end{aligned}$$

In A_1 kann man alle Zahlen $n \geq 12 + 1 = 13$ als Summe darstellen, in A_2 alle $n \geq 11 + 4 = 15$ und in A_3 alle $n \geq 10 + 7 = 17$. Die Zahlen $15, 16$ sind wegen $7 + 8 = 15$ und $7 + 9 = 16$ ebenfalls Summer zweier Elemente aus A_3.
Nehme nun an $k \geq 4$. Falls $A_1, \dots, A_k$ die Bedingung erfüllen, dann sicher auch $A_1, A_2, A_3, \bigcup_{4 \leq i \leq k} A_i$, wir können also $k = 4$ annehmen. Setze $B_i = A_i \cap \{1, 2, \dots, 23\}$. Dann muss jede der Zahlen $15, 16, \dots 23$ als Summer zweier verschiedener Elemente aus B_i schreiben lassen, also $|B_i| \geq 5$. Andererseits gilt auch $|B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| = 23$, es gibt also ein i mit $|B_i| = 5$, schreibe $B_i = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$. Beachte nun, dass sich die 10 Zahlen $15, 16, \dots 24$ alle als Summe zweier verschiedener Elemente aus B_i schreiben lassen, man aber mit verschiedenen Elementen aus B_i höchstens 10 solche Summen bilden kann. Wir summieren also über alle solche Summen und erhalten

$$4(x_1, \dots, x_5) = 15 + 16 + \cdots + 24 = 195,$$

ein Widerspruch, da 195 nicht durch 4 teilbar ist.

10. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc \geq 1$. Beweise die Ungleichung

$$\frac{a^4 - 1}{ab^3 + abc + ac^3} + \frac{b^4 - 1}{bc^3 + abc + ba^3} + \frac{c^4 - 1}{ca^3 + abc + cb^3} \geq 0.$$

Lösung 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{a^4 - 1}{ab^3 + abc + ac^3} &= \sum_{cyc} \frac{\frac{1}{9}a^3 + \frac{4}{9}a^3 + \frac{4}{9}a^3 - \frac{1}{a}}{b^3 + bc + c^3} \\
&\geq \sum_{cyc} \frac{\frac{1}{9}(a^3 + 4b^3 + 4c^3) - \frac{1}{a}}{b^3 + bc + c^3} \geq 0
\end{aligned}$$

Wobei im ersten Schritt Haupsatz verwendet wurde, denn (a^3, b^3, c^3) und $(\frac{1}{b^3+bc+c^3}, \frac{1}{a^3+ac+c^3}, \frac{1}{a^3+ab+b^3})$ sind gleich geordnet und im zweiten Schritt wurde AM-GM verwendet: $\frac{a^3+b^3+b^3+b^3+b^3+c^3+c^3+c^3+c^3}{9} \geq a^{1/3}b^{4/3}c^{4/3} \geq a^{-1}$.

Lösung 2.

$$\sum_{cyc} \frac{a^4-1}{ab^3+abc+ac^3} = \sum_{cyc} \frac{a^4+ab^3+abc+ac^3-1}{ab^3+abc+ac^3} - 3 \geq \sum_{cyc} \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+bc+c^3} - 3$$
$$\geq 3(a^3+b^3+c^3)\sum_{cyc} \frac{1}{4b^3+4c^3+1} - 3$$
$$\geq \frac{27(a^3+b^3+c^3)}{8(a^3+b^3+c^3)+3} - 3 \geq 0$$

Wobei im zweiten Schritt $bc \leq \frac{b^3+c^3+1}{3}$ verwendet wurde und im dritten Schritt AM-HM.

Lösung 3.

$$\sum_{cyc} \frac{a^4-1}{ab^3+abc+ac^3} = \frac{12}{13}\sum_{cyc} \frac{a^3}{b^3+bc+c^3} + \sum_{cyc} \frac{a^4+4ab^3+4abc+4ac^3-13}{13(ab^3+abc+ac^3)} - \frac{12}{13}$$
$$\geq \frac{12}{13}\left(\sum_{cyc} \frac{a^3}{b^3+bc+c^3} - 1\right)$$

Wobei AM-GM verwendet wurde: $a^4+ab^3+ab^3+ab^3+ab^3+abc+abc+abc+abc+ac^3+ac^3+ac^3+ac^3 \geq 13(abc)^{16/13} \geq 13$. Mit Cauchy-Schwarz gilt nun:

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{b^3+bc+c^3} - 1 \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+abc(a^2+b^2+c^2)} - 1$$
$$\geq \frac{a^6+b^6+c^6-(abc)^{\frac{4}{3}}(a^2+b^2+c^2)}{2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+abc(a^2+b^2+c^2)} \geq 0$$

Im letzten Schritt wurde noch AM-GM verwendet: $\frac{a^6+a^6+a^6+a^6+a^6+b^6+b^6+c^6+c^6}{9} \geq (abc)^{4/3}a^2$ oder die Potenzmittelungleichung mit AM-GM: $a^6+b^6+c^6 \geq \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)^3 \geq (abc)^{\frac{4}{3}}(a^2+b^2+c^2)$.

Lösung 4. Alternativ kann man nach dem Anfang von Lösung 3. auch wie folgt weiterfahren:

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{b^3+bc+c^3} \geq 3\sum_{cyc} \frac{a^3}{4b^3+4c^3+1} \geq \frac{3(a^3+b^3+c^3)^2}{8(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+(a^3+b^3+c^3)}$$
$$= \frac{6(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+2(a^6+b^6+c^6)+(a^6+b^6+c^6)}{8(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+(a^3+b^3+c^3)}$$
$$\geq \frac{8(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+\frac{(a^3+b^3+c^3)}{3}(a^3+b^3+c^3)}{8(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+(a^3+b^3+c^3)} \geq 1$$

Im ersten Schritt wurde wieder $bc \leq \frac{b^3+c^3+1}{3}$ verwendet. Im zweiten Schritt brauchte man Cauchy-Schwarz und im letzten Schritt AM-GM und QM-AM/Chebychef.

Lösung 5.

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a^4-1}{ab^3+abc+ac^3} &\geq \sum_{cyc}\frac{a^4-1}{ab^3+a^2bc+ac^3} = \left(\sum_{cyc}\frac{a^4+\frac{ab^3+a^2bc+ac^3}{3}-1}{ab^3+a^2bc+ac^3}\right)-1\\ &\geq \left(\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^3+abc+c^3}\right)-1\\ &\geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+abc(a^3+b^3+c^3)}-1\\ &= \frac{a^6+b^6+c^6-abc(a^3+b^3+c^3)}{2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+abc(a^3+b^3+c^3)}\geq 0\end{aligned}$$

Im ersten Schritt muss man zwei Fälle unterscheiden: ist $a \geq 1$ so ist der Bruch nicht negativ und man macht den Nenner höchstens grösser und somit den Bruch höchstens kleiner, ist $a < 1$ so ist der Bruch negativ und man mach den Nenner kleiner und somit der Bruch kleiner. Im zweiten Schritt wurde AM-GM verwendet und im dritten Cauchy-Schwarz. Der vierte Schritt folgt aus QM-AM und AM-GM: $a^6+b^6+c^6 \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}(a^3+b^3+c^3) \geq abc(a^3+b^3+c^3)$.

11. Sei I der Inkreismittelpunkt und AD der Durchmesser des Umkreises eines Dreiecks ABC. Seien E und F Punkte auf den Strahlen BA und CA mit

$$BE = CF = \frac{AB+BC+CA}{2}.$$

Zeige, dass sich die Geraden EF und DI rechtwinklig schneiden.

Lösung Seien B_0, C_0 die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC auf den Seiten AC, AB. Wir können nun schreiben:

$$x = AB_0 = AC_0,\ \ y = C_0B,\ \ z = B_0C,$$

wobei $x+y+z = \frac{AB+BC+CA}{2}$ gilt. Die Bedingung aus der Aufgabenstellung liefert uns jetzt $EA = z$ und $AF = y$.

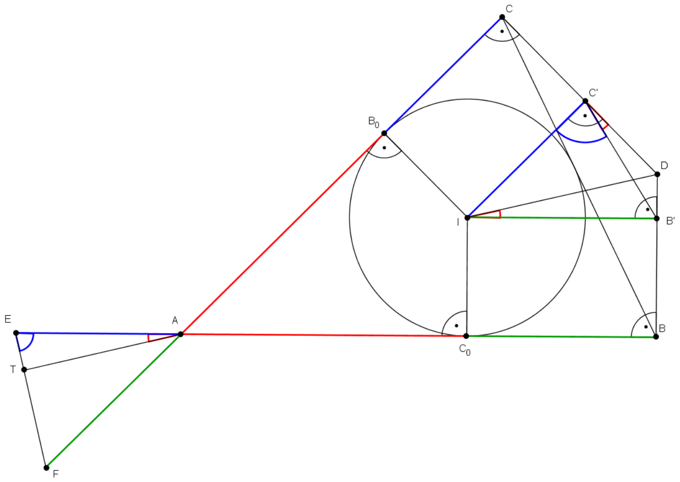

Abbildung 4: Aufgabe 11

Seien nun B', C' die Lote von I auf die Seiten BD, CD. Nach Konstruktion sind $IC_0BB', IC'CB_0$ Rechtecke und damit gilt $IB' = C_0B = y$ und $IC' = B_0C = z$. Unter Ausnutzung von $AB \parallel IB', AC \parallel IC'$ erhalten wir:

$$\angle B'IC' = \angle BAC = \angle EAF$$

Die beiden Dreiecke $IB'C'$ und AEF stimmen also in zwei Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel überein und sind somit kongruent. Sei T der Schnittpunkt von EF und der Parallelen zu ID durch A. Es genügt zu zeigen, dass $\angle ETA = 90°$ gilt. Mit den beiden kongruenten Dreiecken und dem Sehnenviereck $IB'DC'$ erhalten wir:

$$\angle TEA = \angle B'C'I = 90° - \angle B'C'D = 90° - \angle B'ID = \angle 90° - \angle EAT,$$

woraus die gewünschte Aussage folgt.

12. Finde alle ganzen Zahlen $m, n \geq 2$, welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

(i) $m + 1$ ist eine Primzahl von der Form $4k + 3$ für eine ganze Zahl k.

(ii) Es existiert eine Primzahl p und eine nichtnegative ganze Zahl a mit

$$\frac{m^{2^n-1} - 1}{m - 1} = m^n + p^a.$$

Lösung Nach Voraussetzung ist $m \equiv 2\ (4)$. Schreibe die Gleichung um zu

$$m^{2^n-1} - 1 = (m-1)(m^n + p^a).$$

Da $n \geq 2$ erhält man $-1 \equiv p^a\ (4)$, also $p \equiv 3\ (4)$ und $a \geq 1$ ungerade. Nun ist $q = m+1$ prim und es gilt $-2 \equiv -2((-1)^n + p^a)\ (q)$. Das q ungerade können wir mit -2 kürzen und erhalten so $p^a \equiv 1 - (-1)^n\ (q)$.
1. Fall: n gerade Dann gilt $p^a \equiv 0\ (q)$ und daher $p = q$. Angenommen $n \geq 3$, dann folgt $-1 \equiv (p-2)p^a\ (8)$. Nun ist aber $p = q \equiv 3\ (4)$, also $p \equiv 3, 7\ (8)$. Da nun aber a ungerade ist, kann man leicht nachprüfen, dass diese Gleichung keine Lösung hat, also $n = 2$. Einsetzen ergibt, dass jedes m, welches Bedingung (i) erfüllt, eine Lösung ist. Zusammengefasst gibt es in dem Fall, wo n gerade ist gerade, die Lösungen (m,2), wobei $m + 1 \equiv 3\ (4)$ prim ist.
2. Fall: n ungerade Schreibe $n + 1 = 2^r n'$ mit n' ungerade und $1 \leq r \leq n-1$. Die obere Schranke für r kommt hier von $2^r \leq n + 1 \leq 2^{n-1}$ für $n \geq 3$. Wegen der Faktorisierungen

$$\begin{aligned} m^{n+1} + 1 &= (m^{2^r} + 1)(m^{n+1-2r} - m^{n+1-2\cdot 2^r} \cdots + 1) \\ m^{2^n} - 1 &= (m^{2^r} - 1)(m^{2^r} + 1)(m^{2^{r+1}} + 1) \dots (m^{2^{n-1}+1}) \end{aligned}$$

folgt, dass $m^{n+1} + 1$ durch $m^{2^r} + 1$ teilbar ist und $m^{2^n} - 1$ durch $(m^{2^r} + 1)(m - 1)$. Also insgesammt

$$m^{2^r} + 1 \left| \frac{m^{2^n} - 1}{m - 1} - (m^{n+1} + 1) = mp^a. \right.$$

Wegen $(m^{2^r} + 1, m) = 1$ ist also $m^{2^r} + 1 = p^b$ für $1 \leq b \leq a$. Da $p \equiv 3\ (4)$ folgt, dass $b = 2c$ gerade sein muss. Daher muss auch gelten $1 = (p^c - m^{2^{r-1}})(p^c + m^{2^{r-1}})$, ein Widerspruch. Also gibt es keine Lösung im Fall, wo n ungerade ist.