OSM Tour final 2012

premier examen - le 9 mars 2012

Durée : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. 2012 caméléons sont assis autour d'une table ronde. Au début chaque caméléon est rouge ou vert. Après chaque minute, chaque caméléon dont les deux voisins avaient la même couleur, change de couleur. Tous les autres gardent leur couleur. Montrer qu'après 2012 minutes il existent au moins deux caméléons qui ont changé de couleur le même nombre de fois.

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on ait

$$f\left(f(x) + 2f(y)\right) = f(2x) + 8y + 6.$$

3. Soient D et P les points d'intersection de deux cercles k_1 et k_2. Une droite est tangente à k_1 et k_2 du côté de D. Elle coupe k_1 resp. k_2 en A resp. B. Soit C le deuxième point d'intersection de la droite AD avec k_2. Soit M le milieu du segment BC. Montrer que $\angle DPM = \angle BDC$.

4. Montrer qu'il n'existe pas une séquence infinie de nombres premiers $p_1, p_2, p_3, \ldots$, tel que pour tout k: $p_{k+1} = 2p_k - 1$ ou $p_{k+1} = 2p_k + 1$. Attention: ce n'est pas forcément la même formule pour tous les k.

5. Soit n un nombre naturel. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des sous-ensembles distincts à 3 éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $|A_i \cap A_j| \neq 1$ pour tout $1 \leq i, j \leq k$. Déterminer tous les n tels qu'il existe n sous-ensembles avec cette propriété.

Bonne chance !

OSM Tour final 2012

deuxième examen - le 10 mars 2012

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Soit $ABCD$ un parallélograme et k le cercle circonscrit du triangle ABC. Soit E le point de k diamétralement opposé à B. Montrer que le cercle circonscrit du triangle ADE et k ont le même rayon.

7. Soient n et k des nombres naturels tels que $n = 3k + 2$. Montrer que la somme de tous les diviseurs de n est divisible par 3.

8. On considère un dé et deux de ses coins, A et B qui sont les extrémités d'une diagonale d'une des faces. Un *chemin* est une suite de coins du dé, tel que à chaque pas on se déplace d'un coin le long d'une arête à un coin voisin. Soit a le nombre de chemins de longueur 2012 qui commencent au point A et se terminent en A et soit b le nombre de chemins de longueur 2012 qui commencent en A et se terminent en B. Déterminer lequel des nombres a et b est le plus grand.

9. Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels avec $abc = 1$. Montrer

$$1 + ab + bc + ca \geq \min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab}, \frac{(b+c)^2}{bc}, \frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

Quand y a-t-il égalité?

10. Soit O un point intérieur d'un triangle aigu ABC. Soient A_1, B_1 et C_1 les projections de O sur les côtés BC, AC et AB. Soit P le point d'intersection des perpendiculaires à B_1C_1 et A_1C_1 passant par les points A et B respectivement. Soit H la projection de P sur AB. Montrer que les points A_1, B_1, C_1 et H sont sur un cercle.

Bonne chance !