Lösungen zur Finalrundenprüfung 2012

1. Jedes Chamäleon hat nach 2012 Minuten zwischen 0 und 2012-mal die Farbe gewechselt. Wenn wir zeigen, dass keines 0 mal und keines 2012 mal die Farbe gewechselt hat, sind wir fertig, denn dann gibt es nur 2011 Schubfächer (Anzahl Farbwechsel) und 2012 Chämaleons. Nehmen wir an, ein Chamäleon hat 0 mal die Farbe gewechselt und nennen wir dieses 1. Nummerieren wir die Chamäleons startend bei 1 links herum mit $2L, 3L, \ldots, 1006L$ und rechts herum mit $2R, 3R, \ldots, 1006R$ bis zum letzten gegenüber von 1, welches wir 1007 nennen. Da 1 null mal die Farbe wechselt, müssen $2L$ und $2R$ bis zur 2011-ten Minute immer verschieden farbig sein und insbesonder bis dann gleichzeitig die Farbe wechseln. Das bedeutet, dass $3L$ und $3R$ bis zur 2010-ten Minute immer die gleiche Farbe haben müssen und somit auch gleichzeit die Farbe wechseln. Dies wiederum bedeutet, dass $4L$ und $4R$ bis zur 2009-ten Minute immer verschieden farbig sein und insbesonder bis dann gleichzeitig die Farbe wechseln, usw. Wenn $2L$ und $2R$ in der 2012-ten Minute beide die Farbe wechseln, haben sie immer gleichzeitig die Farbe gewechselt und wir sind fertig. Nehme an das sei nicht der Fall. Das heisst, sie wechseln in Minute 2012 micht beide die Farbe. $\Rightarrow$ $3L$ und $3R$ sind verschiedenfarbig in Minute 2011 und haben deshalb in Minute 2011 nicht beide die Farbe gewechselt. $\Rightarrow$ $4L$ und $4R$ haben in Minute 2010 nicht gleichzeitig die Farbe gewechselt $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $1006L$ und $1006R$ haben in Minute 1008 nicht beide die Farbe gewechselt $\Rightarrow$ 1007 und 1007 haben nicht beide in Minute 1007 die Farbe gewechselt, dies ist aber ein und dasselbe Chamäleon, was absurd ist. Wiederspruch!
Sehr ähnlich schliessen wir aus, dass ein Chamäleon immer die Farbe wechselt.

2. Setzt man $x = 0$, so erhält man

$$f(f(0) + 2f(y)) = f(0) + 8y + 6 \quad \forall y$$

Die rechte Seite nimmt nun alle reellen Zahlen an, daraus folgt f ist surjektiv. Andererseits gilt $f(u) = f(v)$ so folgt:

$$f(0) + 8u + 6 = f(f(0) + 2f(u)) = f(f(0) + 2f(v)) = f(0) + 8v + 6 \Rightarrow u = v$$

Also ist f injektiv und somit bijektiv. Setzt man nun $y = -3/4$ so erhählt man

$$f((x) + 2f(-3/4)) = f(2x) \quad \forall x \Rightarrow f(x) + 2f(-3/4) = 2x \quad \forall x$$

Wobei Injektivität benutzt wurde.
Alternativ existiert nach Surjektivität ein c (abhängig von x!), sodass $f(c) = x - f(x)/2$ gilt. Setzt man nun $y = c$ in die ursprüngliche Gleichung so folgt $c = -3/4$ insbesondere ist also c unabhängig von x und es gilt $f(-3/4) = x - f(x)/2 \; \forall x$.
Es gilt also $f(x) = 2x + k \; \forall x$ für eine bestimmte Konstante k. Einsetzen liefert nun die einzige Lösung $f(x) = 2x + 1 \; \forall x$.

3. Sei G der Schnittpunkt von PD mit AB. Da DP die Potenzlinie zu k_1 und k_2 ist und AB eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise, ist G der Mittelpunkt der Strecke AB. Somit folgt mit dem Strahlensatz $AC \parallel GM$. Dies zusammen mit dem Peripheriewinkelsatz ergibt $\angle GPB = \angle DCB = \angle GMB$. Es folgt, dass $GPMB$ ein Sehnenviereck ist. Schliesslich ist $\angle GPM = 180° - \angle GBM = \angle BDC$ mit dem Tangenetenwinkelsatz, was die Behauptung zeigt.

4. Nehme an es gäbe eine solche unendliche Folge von Primzahlen. Es gilt $p_{k+1} = 2p_k \pm 1 \geq 2p_k - 1 > p_k$. Es gibt also ein n, sodass p_n und alle darauf folgende Primzahlen ≥ 5 sind. Falls nun $p_k \equiv 1 \bmod 3$ für ein $k \geq n$ gilt, folgt $3 | 2p_k + 1$ und somit $p_{k+1} = 2p_k - 1 \equiv 1 \bmod 3$. Umgekehrt folgt analog, dass falls $p_k \equiv 2 \bmod 3$ für ein $k \geq n$ gilt, so folgt $p_{k+1} = 2p_k + 1 \equiv 2 \bmod 3$. Falls $p_n \equiv 1 \bmod 3$, so folgt mit Induktion: $p_{n+k} = (p_n - 1)2^k + 1$. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $p_n | (p_n - 1)2^{p_n - 1} + 1 = p_{n+p_n-1}$. Widerspruch zu p_{n+p_n-1} prim und $p_{n+p_n-1} > p_n$. Falls $p_n \equiv 2 \bmod 3$, so folgt mit Induktion: $p_{n+k} = (p_n + 1)2^k - 1$. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $p_n | (p_n + 1)2^{p_n - 1} - 1 = p_{n+p_n-1}$. Widerspruch zu p_{n+p_n-1} prim und $p_{n+p_n-1} > p_n$.

5. Sei $A_1, \ldots A_k$ eine grösstmögliche Kollektion solcher Teilmengen. Wir zeigen zuerst, dass $k \leq n$ gelten muss. Dies ist sicher richtig für $n = 1$ und wir nehmen nun an es stimme für alle $n' < n$, wobei $n \geq 2$. Falls jede Zahl $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in drei oder weniger A_i's enthalten ist, so gilt dies offensichtlich nach Schubfachprinzip. Nehme nun an, a sei in jeder der 3-elementigen Mengen $B_1, B_2, \ldots B_m \in \{A_1, \ldots A_k\}$ für $m \geq 4$ enthalten. Nach Voraussetzung gilt $|B_i \cap B_j| = 2$ woraus man schliessen kann, dass Zahlen $b, c, d \in \{1, \ldots, n\}$ existieren mit

$$B_1 = \{a, b, c\} \quad B_2 = \{a, b, d\}$$

Falls nun $b \notin B_3$, so gilt $B_3 = \{a, c, d\}$. Nun überlegt man sich aber leicht, dass es keine weitere Menge mit drei Elementen geben kann, die a enthält und mit B_1, B_2 und B_3 jeweils zwei Elemente gemeinsam hat, was ein Wiederspruch zu $m \geq 4$ ist. Also gilt $b \in B_3$. Anaolg folgt $b \in B_i$ für alle $1 \leq i \leq m$ oder anders gesagt $B_i = \{a, b, x_i\}$ für ein $x_i \in \{1, \ldots, n\}$. Weiter gilt $x_i \in A_j$ genau dann wenn $A_j = B_i$, da jede Menge die a enthält auch b enthält und umgekehrt. Dies zeigt, dass die restlichen $k - m$ Mengen nur Zahlen ungleich $a, b, x_1, \ldots x_m$ enthalten, also insgesammt Teilmengen einer $n - m - 2$ elementigen Mengen sind. Verwenden wir nun die Induktionsvoraussetzung für $n - m - 2$ sehen wir, dass wir nicht n dreielementige Teilmengen erhalten, wenn ein Punkt in mehr als drei Mengen enthalten ist. Falls es nun einen Punkt gibt, der in weniger als 3 Mengen ist, folgt wieder mit dem Schubfachprinzip, dass man nicht n Teilmengen erhält. Somit muss jeder Punkt in genau drei Teilmengen enthalten sein. In diesem Fall kann man sich aber überlegen, dass sich die Teilmengen in Vierergruppen aufteilen, wobei jede Gruppe von der Form

$$A_1 = \{a, b, c\} A_2 = \{a, b, d\} A_3 = \{a, c, d\} A_4 = \{b, c, d\}$$

ist. Dies zeigt, dass $k = n$ genau dann möglich ist, wenn n durch vier teilbar ist.

6. **1. Lösung:** Sei F jener Punkt auf k, der diametral gegenüber von A liegt. Da BE und AF Durchmesser von k sind, folgt $\angle EAB = \angle ABF = \angle BFE = \angle FEA = 90°$ (Thaleskreis). $ABFE$ ist nun offenbar ein Rechteck und somit sind die Strecken AB und EF gleich lang und parallel. Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, sind sogar die drei Strecken AB, CD und EF jeweils gleich lang und parallel. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass es eine Translation gibt, die A in B, D in C und E in F überführt. Bei dieser Translation wird somit der Umkreis des Dreiecks ADE in den Umkreis des Dreiecks BCF überführt, welcher gerade k ist, und hieraus folgt, dass die beiden Kreise gleich gross sind und auch denselben Radius haben.

2. Lösung: Sei F der zweite Schnittpunkt von DC und k neben C und sei G der Schnittpunkt von EA und FD. Weiter sei $\alpha = \angle GDA$. Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, folgt $\angle ABC = 180° - \alpha$. $FABC$ ist ein Sehnenviereck, somit gilt $\angle GFA = 180° - \angle ABC = \alpha$. EB ist der Durchmesser von k, also liegt A auf dem Thaleskreis über EB und es gilt $\angle EAB = 90°$. Da AB und GC parallel sind, ist $\angle EGD = \angle EAB = 90°$. Betrachte nun die Dreiecke GAD und GFA. Diese sind kongruent, da sie in zwei Winkeln und der gemeinsamen Kante GA übereinstimmen. Weiter sind die Dreiecke GEF und GDE kongruent, da sie in zwei Seiten ($FG = GD$, da GAD und GFA kongruent, und gemeinsame Kante EG) und dem eingeschlossenen Winkel (der rechte Winkel bei G) übereinstimmen. Daraus folgt sofort, dass auch die Dreiecke EAD und EFA kongruent sind, woraus die Behauptung folgt, da der Umkeis des Dreiecks EFA gerade k ist.

7. On appelle $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_s = n$ les diviseurs de n. Comme $n \not\equiv 0, 1 \bmod 3$, n ne peut pas être un carré. On peut alors grouper ses diviseurs en couples (d_t, d_{t-s}) de nombres distincts. Or $d_t \cdot d_{s-t} = n \equiv 2 \bmod 3$, aucun des deux n'est divisible par 3 et plus précisément l'un des deux vaut 2 et l'autre 1 mod 3. Mais alors $3 | d_t + d_{s-t}$ et finalement $3 | d_1 + \ldots + d_s$.

8. **1ère solution:** On introduit les coins C et D qui sont les deux coins à distance 2 de A et B. On définit

$$x_n = \text{ nombre de chemins de longueur } n \text{ de } A \text{ à } X.$$

Avec ces notations on a

$$a_{n+2} = 3a_n + 2b_n + 2c_n + 2d_n \quad \text{et} \quad b_{n+2} = 2a_n + 3b_n + 2c_n + 2d_n.$$

Donc $a_{n+2} - b_{n+2} = a_n - b_n$ et finalement $a - b = a_{2012} - b_{2012} = a_2 - b_2 = 3 - 2 = 1$.

2ème solution: On appelle π le plan contenant les quatre coins qui sont à distance égale de A et de B. On construit une application

$$\{\text{chemins de } A \text{ à } B \text{ de longueur } 2012\} \longrightarrow \{\text{chemins de } A \text{ à } A \text{ de longueur } 2012\}$$

par l'opération suivante: On remplace la fin du chemin à partir du dernier moment qu'il passe par π par son symétrique par rapport à π. Cette application est bien définie car tout chemin allant de A à B doit passer par π et elle est injective (on peut retrouver la préimage d'un chemin on effectuant la même opération encore une fois). De plus si X est le coin à distance 1 de A qui n'est pas dans π, le chemin $(AXA \cdots XA)$ n'est pas dans l'image. Donc $b < a$.

9. Zwei der drei Zahlen a, b, c Zahlen liegen auf der selben Seite von 1. Wegen der Symmetrie seien dies ohne Beeinschränkung der Allgemeinheit a, b. Dann gilt folgende Ungleichung:

$$1 + ab \geq a + b \Leftrightarrow (a-1)(b-1) \geq 0$$

Wir wenden diese Ungleichung nun mehrmals an:

$$1 + ab + bc + ca \geq a + b + (a+b)c = \frac{(a+b)(1+ab)}{ab} \geq \frac{(a+b)^2}{ab}$$
$$\geq \min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab}, \frac{(b+c)^2}{bc}, \frac{(c+a)^2}{ca}\right\}$$

Für Gleichheit muss in erster Linie $a = 1$ oder $b = 1$ gelten. Wegen der Symmetrie gelte ohne Beeinschränkung der Allgemeinheit $a = 1$, dann ist die Ungleichung äquivalent zu:

$$b + \frac{1}{b} + 2 \geq \min\left\{b + \frac{1}{b} + 2, b^2 + \frac{1}{b^2} + 2\right\} = b + \frac{1}{b} + 2$$

Da nach AM-GM gilt:

$$b^2 + 1 + \frac{1}{b^2} + 1 \geq 2b + \frac{2}{b} = b + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{b} \geq b + \frac{1}{b} + 2$$

Gleichheit gilt also dann und nur dann falls eine Variable gleich 1 ist.

10. **1. Lösung** Sei D der Schnittpunkt von A_1C_1 und BP und sei E der Schnittpunkt von B_1C_1 und AP. Als erstes beobachten wir, dass H, D und E auf dem Thaleskreis über PC_1 liegen. Sei S der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks HC_1B_1 und AC und sei T der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks HC_1A_1 und BC. Das Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden eben genannten Umkreise übereinstimmen. Anwendung des Potenzsatzes an den Umkreisen von HC_1DPE und HC_1A_1T liefert

$$BD \cdot BP = BC_1 \cdot BH = BA_1 \cdot BT$$

Also ist nach der Umkehrung des Potenzsatzes PDA_1T ein Sehnenviereck. Wegen $\angle PDA_1 = 90^\circ$ ist des Umkreis dieses Vierecks gerade der Thaleskreis über PA_1 und somit gilt auch

$\angle PTA_1 = 90°$. Wir wollen uns nun überlegen, wo der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks HC_1A_1T zu liegen kommt. Offenbar ist dies aber gerade der Mittelpunkt der Strecke OP, da die Mittelsenkrechten von HC_1 und A_1T beide durch diesen Punkt gehen. Analog erhalten wir, dass der Mittelpunkt der Strecke OP auch der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks HC_1SB_1 ist. Nun sind wir fertig, da die Mittelpunkte der Umkreise der Sehnenvierecke HC_1A_1T und HC_1SB_1 übereinstimmen und H und C_1 auf beiden Kreisen liegen, d.h. die Kreise fallen zusammen und damit wäre die Aussage bewiesen.

2. Lösung Seien l_1 resp. l_2 die Parallelen zu AP durch B_1 resp. zu BP durch A_1. Weiter schneide l_1 die Gerade AB in G und l_2 in I. Zudem schneidet l_2 die Gerade AB in F. Nach Kostruktion liegen nun A_1 und B_1 auf dem Thaleskreis über der Strecke IC_1. Es genügt somit zu zeigen, dass I, P und H auf einer Geraden liegen, denn dann ist auch $\angle IHC_1 = 90°$. Wir zeigen dies, indem wir beweisen, dass das Dreieck GFI eine Streckung des Dreiecks ABP an H ist:

Seien dazu K und L die Schnittpunkte der Parallelen zu B_1C_1 durch H mit AP resp. GI. Analog sind M und N definiert. Es genügt nun $\frac{LK}{KH} = \frac{NM}{MH}$ zu zeigen. Definiere dazu weiter E und D als Schnittpunkte von B_1C_1 mit AP resp. von A_1C_1 mit BP. Nach Kostruktion gilt dann $LK = B_1E$ und wegen $\triangle AHK \sim \triangle AHP$ ist $KH = \frac{AH \cdot PH}{AP}$. Weiter zeigt man mit Winkeljagd $\angle OAC_1 = \angle OB_1C_1 = \angle EAB_1$ und somit $\triangle B_1AE \sim \triangle OAC_1$. Dies ergibt die Beziehung $B_1E = \frac{EA \cdot OC_1}{AC_1}$. Fasst man alles zusammen, was wir bisher haben, so erhält man

$$\frac{LK}{KH} = \frac{EA \cdot OC_1 \cdot AP}{AC_1 \cdot AH \cdot PH}.$$

Nun verwenden wir noch, dass E und H auf dem Thaleskreis über PC_1 liegen und erhalten mit dem Potenzsatz $AH \cdot AC_1 = AE \cdot AP$. Schliesslich erhält man so $\frac{LK}{KH} = \frac{OC_1}{PH}$. Aus Symmetriegründen muss analog auch $\frac{NM}{MH} = \frac{OC_1}{PH}$ gelten, was den Beweis abschliesst.