OSM - Examen préliminaire

Bellinzona, Lausanne, Zurich - le 8 janvier 2011

Durée : 3 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit ABC un triangle avec $\angle CAB = 90°$. Soit L un point sur le côté BC. Soit M le point d'intersection du cercle circonscrit du triangle ABL avec la droite AC et soit N le point d'intersection du cercle circonscrit du triangle CAL avec la droite AB. On suppose que N se trouve à l'intérieur du côté AB et que M se trouve sur le prolongement du côté AC. Montrer que L, M et N sont alignés.

2. Trouver tous les nombres naturels n tels que n^3 est le produit de tous les diviseurs positifs de n.

3. Il y a 11 nombres naturels écrits au tableau noir. Montrer que l'on peut choisir certains d'entre eux (éventuellement tous) et placer les signes $+$ et $-$ entre eux de telle sorte que le résultat soit divisible par 2011.

4. On considère une ligne de bus cyclique (c'est-à-dire formant une boucle) avec $n \geq 2$ arrêts. On appelle *tronçon* le parcours entre deux arrêts successifs. Chaque tronçon peut être parcouru dans les deux sens. Un des arrêts s'appelle Lausanne. Un bus doit partir de Lausanne, parcourir exactement $n + 2$ tronçons et terminer son parcours à Lausanne. De plus il doit visiter tous les arrêts au moins une fois. Le bus peut faire demi-tour à tous les arrêts. Déterminer le nombre de parcours possibles.

5. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit tel que les symétries de la droite AB par rapport aux bissectrices des angles $\angle CAD$ et $\angle CBD$ ont un point d'intersection P. Soit O le centre du cercle circonscrit de $ABCD$. Montrer que OP est perpendiculaire à CD.

Bonne chance !