Sélection OIM 2011

Premier examen - 7 mai 2011

Durée : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver toutes les paires (p, q) de nombres premiers telles que $3 \nmid p + 1$ et

$$\frac{p^3 + 1}{q}$$

est le carré d'un nombre naturel.

2. La droite g coupe le cercle k aux points A et B. La médiatrice du segment AB coupe k aux points C et D. Soit P un point de g qui se trouve en dehors du cercle k. Les parallèles à CA et CP passant par P coupent CB et CA aux points X et Y, respectivement. Montrer que XY et DP sont perpendiculaires.

3. On considère un plateau de jeu dont les côtés sont de longueur impaire et qui est découpé en carrés unité. Le plateau est recouvert de dominos de sorte que seul une case dans un angle reste libre. A chaque mouvement on peut glisser un domino dans le sens longitudinal pour qu'il recouvre la case libre auparavant. Ainsi une nouvelle case (deux cases plus loin) se libère. Montrer qu'il existe des suites de mouvements qui permettent de déplacer la case libre dans n'importe quelle case angulaire.
Remarque : Un domino recouvre exactement deux carrés unité qui ont un côté en commun.

Bonne chance !

Sélection OIM 2011

Deuxième examen - 8 mai 2011

Durée : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soit n un nombre naturel. Dans une cage de singes se trouvent n singes et n perches. Pour que les singes se bougent un peu, les gardiens placent une banane en haut de chaque perche. De plus, ils relient les perches avec un nombre fini de cordes, de sorte que deux extrémités de corde sont toujours fixés à des points distincts. Quand un singe grimpe une perche et trouve une corde, il ne peut pas résister à la tentation de suivre la corde pour arriver à une autre perche avant de continuer son ascension. Chaque singe commence à une perche différente. Montrer que chaque singe trouvera une banane.

5. Montrer qu'il existe des nombres naturels a, b, c tels que la somme des chiffres de $a+b, b+c$ et $c+a$ est plus petite que 5 mais la somme des chiffres de $a+b+c$ est supérieure à 50.

6. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ telles que pour tous les nombres rationnels positifs x et y on a

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

Bonne chance !

Sélection OIM 2011

Troisième examen - 21 mai 2011

Durée : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

7. Trouver tous les polynômes $P \neq 0$ à coefficients réels, satisfaisant les conditions suivantes :

$$P(P(k)) = P(k)^2 \text{ pour } k = 0, 1, 2, \ldots, (\deg P)^2$$

8. Montrer qu'il y a plus de 10^{13} possibilités de placer 81 rois sur un échiquier 18×18 de telle sorte que aucun roi ne peut attaquer un autre.
Remarque : Un roi peut attaquer un autre roi, si les cases qu'ils occupent ont un côté ou un coin en commun.

9. Dans un triangle ABC avec $AB \neq AC$, soit D la projection de A sur BC. De plus soient E et F les centres des segments AD et BC respectivement et soit G la projection de B sur AF. Montrer que la droite EF est la tangente au point F au cercle circonscrit du triangle GFC.

Bonne chance !

Sélection OIM 2011

Quatrième examen - 22 mai 2011

Durée : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit $ABCD$ un carré et M un point à l'intérieur du segment BC. La bissectrice de l'angle $\angle BAM$ coupe le segment BC au point E. De plus la bissectrice de l'angle $\angle MAD$ coupe la droite CD au point F. Montrer que AM et EF sont perpendiculaires.

11. Soient $x_1, \ldots, x_8 \geq 0$ des nombres réels tels que pour $i = 1, \ldots, 8$ on a $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$, où $x_9 = x_1$ et $x_{10} = x_2$. Montrer l'inéquation

$$\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+2} \leq 1$$

et trouver tous les cas d'égalité.

12. Soit $a > 1$ un nombre naturel et soient f et g des polynômes à coefficients entiers. Supposons qu'il existe un nombre naturel n_0 tel que $g(n) > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et

$$f(n) \mid a^{g(n)} - 1 \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Montrer que f est constant.

Bonne chance !