Lösungen zur IMO Selektion 2011

1. Finde alle Paare von Primzahlen (p, q) mit $3 \nmid p + 1$ so dass

$$\frac{p^3 + 1}{q}$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

1. Lösung Es lässt sich $p^3 + 1 = (p + 1)(p^2 - p + 1)$ faktorisieren. Da q prim ist muss gelten $q|p + 1$ oder $q|p^2 - p + 1$. Ferner ist $\text{ggT}\{p^2 - p + 1, p + 1\} = \text{ggT}\{p^2 - p + 1 - (p + 1)^2 + 3(p + 1), p + 1\} = \text{ggT}\{3, p + 1\} = 1$.
Fall 1: $q|p+1$, dann sind $\frac{p+1}{q}$ und p^2-p+1 teilerfremd und ihr Produkt ist ein Quadrat einer natürlichen Zahl. Daraus folgt, dass beide schon selbst ein Quadrat sein müssen. Es gilt aber für $p > 1$:

$$p^2 > p^2 - p + 1 > (p - 1)^2$$

das heisst $p^2 - p + 1$ kann selbst kein Quadrat sein und somit gibt es in diesem Fall keine Lösung.
Fall 2: $q|p^2 - p + 1$, auch hier sind $\frac{p^2-p+1}{q}$ und $p + 1$ teilerfremd und ihr Produkt ist ein Quadrat, somit sind beide schon selbst ein Quadrat und es muss gelten $p + 1 = a^2$ für ein natürliches a dann ist aber $p = (a - 1)(a + 1)$ für $a > 2$ nicht prim. $a = 2$ liefert $p = 3$, dann ist $p^3 + 1 = 28 = 2^2 \cdot 7$ und q kann nur 7 sein. $a = 1$ liefert $p = 0$.
Somit ist die einzige Lösung $(3, 7)$.

2. Die Gerade g schneide den Kreis k in den Punkten A und B. Die Mittelsenkrechte der Strecke AB schneide k noch einmal in C und D. Sei nun P ein weiterer Punkt auf g, der ausserhalb von k liegt. Die Parallelen zu CA und CB durch P schneiden die Geraden CB und CA in den Punkten X und Y. Beweise, dass XY senkrecht auf PD steht.

1. Lösung Wegen $CA||PX$ und $CB||YB$ kriegen wir ähnliche Dreiecke $\triangle XPB \equiv \triangle CAB \equiv YAP$. Daher können wir Kreise k_1 und k_2 einführen mit Mittelpunkt X bzw Y die durch die Punkte P und B, bzw. durch P und A gehen. Sei nun H der Schnittpunkt von k_1 mit k verschieden von B. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt nun

$$\angle PHB = \frac{\angle PXB}{2} = \frac{\angle ACB}{2} = \angle DCB$$

$$\angle DHA = \angle DCA$$

$$\angle BHA = \angle BDA$$

summieren wir diese drei Gleichungen verwenden, dass $ADBC$ ein Sehnenviereck ist, finden wir

$$\angle PHB + \angle DHA + \angle BHA = 180°,$$

also liegt H auf der Geraden DP. Insbesondere gilt also

$$\angle PHA = 180^\circ - DHA = 180^\circ - \frac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - \frac{\angle AYP}{2}$$

woraus folgt, dass H auch auf k_2 liegt. Nun sind wir fertig, denn PD geht duch die Schnittpunkte von k_1 mit k_2 und XY durch deren Mittelpunkte, somit also $PD \perp XY$.

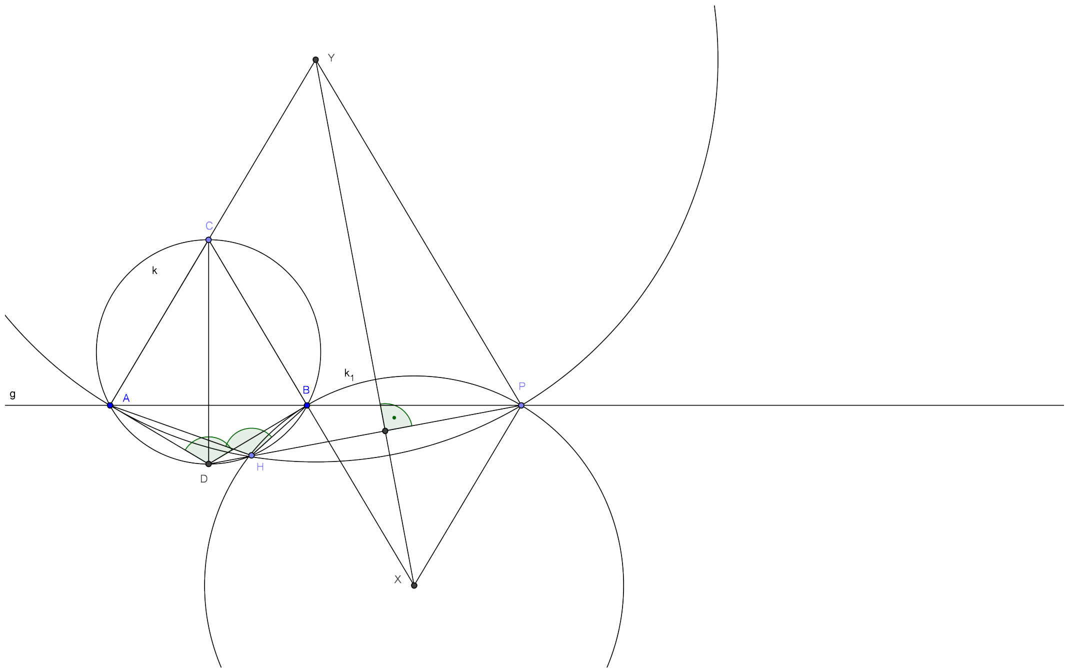

Abbildung 1: Aufgabe 2, 1. Lösung

2. Lösung $PYCX$ ist ein Parallelogramm, also gilt $XP = CY$. Mit einfacher Winkeljagd folgt, dass BXP ein gleichschenkliges Dreieck ist und somit $BX = XP$.
Sei Q der Schnittpunkt von CD und PY. Es gilt $\angle QCY = \angle ACD = \angle DCB = \angle CQY$, also ist das Dreieck QCY gleichschenklig und wir haben $QY = CY$. Zusammen folgt nun $BX = XP = CY = QY$, und da BX und QY parallel sind, ist $BXYQ$ ein Parallelogramm.
Sei R der Schnittpunkt von DB und PY. Es gilt $\angle BRY = \angle DBC = 90^\circ$, also liegt R auf dem Thaleskreis über BQ. Sei S der Schnittpunkt von DC und AB. Es gilt $\angle BSQ = \angle BSC = 90^\circ$, somit liegt auch S auf dem Thaleskreis über BQ und $SBRQ$ ist ein Sehnenviereck. Mit den gefundenen beiden rechten Winkeln folgt ausserdem, dass auch $DPRS$ ein Sehnenviereck ist.
Sei T der Schnittpunkt von XY und PD. Nun folgt mit den Sehnenvierecken und den parallelen Geraden:

$$\angle TDR = \angle PDR = \angle PSR = \angle BSR = \angle BQR = \angle TYR$$

$DTRY$ ist also auch ein Sehnenviereck und schlussendlich folgt nun:

$$\angle DTY = \angle DRY = 90^\circ.$$

3. Betrachte ein Spielbrett mit ungeraden Seitenlängen, das in Einheitsquadrate aufgeteilt ist. Das Brett ohne ein Eckfeld wird irgendwie mit Dominos bedeckt. Man kann nun in einem Zug ein Domino in Längsrichtung um eins verschieben, sodass das vorher leere Feld bedeckt wird, dafür ein neues (zwei Felder davon entfernt) frei wird. Beweise, dass das leere Feld mit einer Folge von Zügen in jede beliebige Ecke des Brettes verschoben werden kann.
Bemerkung: Ein Domino besteht aus aus zwei Einheitsquadraten mit einer gemeinsamen Seite.

Lösung Betrachte ein Eckfeld E, welches von einem Dominostein D_1 bedeckt ist. Dieser grenzt an eine weiteres Feld (zwei Felder vom Eckfeld entfernt), welches entweder ein freies Eckfeld ist oder von einem weiteren Domino D_2 bedeckt ist. So erhält man eine Folge von verschiedenen Dominosteinen $D_1, D_2, \ldots$. Die Folge bricht ab, falls man entweder auf das freie Eckfeld trifft, oder auf ein Feld, welches bereits von einem D_i bedeckt ist. Falls der erste Fall eintrifft kann man die Dominos nun offenbar so schieben, dass E frei wird. Wir werden nun zeigen, dass der zweite Fall nicht eintreten kann.
Im zweiten Fall hätten wir nämlich eine Folge von Dominos die eine geschlossenen Kurve bilden. Wir werden nun zeigen, dass eine solche Kurve immer eine ungerade Anzahl Einheitsquadrate einschliesst, was ein Wiederspruch ist, da ja das Innere auch mit Dominos belegt sein müsste. Um dies zu zeigen benötigen wir einige Notationen: Sei wie in der Aufgabenstellung ein Spielbrett gegeben, welches in Einheitsquadrate aufgeteilt ist. Eine *Dominokurve* ist ein Kantenzug $M_1M_2\ldots M_nM_1$, wobei M_i für $1 \leq i \leq n$ der Mittelpunkt eines Einheitsquadrats ist und $|M_iM_{i+1}| = 2$ für $1 \leq i \leq n$ (setze $M_{n+1} = M_1$). Eine Dominokurve heisst *reduziert* falls für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt: $M_i \neq M_j$. Beachte, dass man jede reduzierte Dominokurve K auch tatsächlich mit Dominos überdecken kann, und daher insbesondere die Anzahl Einheitsquadrate, welche K schneiden, gerade ist. Das *Innere* von K ist Fläche der Einheitsquadrate, die von K umschlossen werden, aber K nicht schneiden. Schliesslich definieren wir das *minimale Rechteck einer Dominokurve* als das kleinste Rechteck bestehend aus Einheitsquadraten, welches die Kurve enthält. Nun das Lemma, welches den gewünschten Wiederspruch liefert:

Lemma Das Innere einer reduzierten Dominokurve ist immer ungerade.

Beweis: Sei $K = M_1M_2\ldots M_nM_1$ eine reduzierte Dominokurve. Wir führen den Beweis induktiv nach der Fläche des minimalen Rechtecks R von K. Die kleinst mögliche Fläche von R ist 9. In dem Fall sind die M_i gerade die Eckpunkte von R und das Innere ist 1. Wir nehmen nun an, R habe die Fläche A und das Lemma stimme für alle reduzierten Dominokurven, deren minimales Rechteck eine Fläche kleiner A haben. Nach Konstruktion habe zwei Eckpuntke von R, die auf einer horizontalen oder vertikalen Linie liegen, geraden Abstand, also sind die beiden Seitenlängen von R ungerade, also auch A ungerade. Falls nun alle M_i auf dem Rand von R liegen folgt aus der Minimalität von R, dass K gerade den ganze Rand durchläuft und daher das Innere von K ungerade ist.
Andernfalls gibt es Punkte die nicht auf dem Rand liegen und wir finden daher $1 \leq k < l \leq n$ so dass M_k und M_l auf dem Rand liegen aber M_i, für $k < i < l$, nicht. Nun existiern am Rand von R entlang enideutige Puntke $N_1, N_2, \ldots N_m$, so

dass

$$K' = M_k M_{k+1} \dots M_l N_1 N_2 \dots N_m M_k$$

ebenfalls eine reduzierte Dominokurve ist. Nun hat aber minimale Rechteck R' von K' strikt kleinere Fläche als R, denn sonst wäre R nicht minimal. Nach Induktionsannahme ist daher das Innere von K' ungerade. Man überlegt sich nun leicht, dass das Innere von

$$K'' = M_1 M_2 \dots M_k N_1 N_2 \dots N_m M_l M_{l+1} \dots M_n M_1$$

sich um eine gerade Zahl vom Innern von K unterscheidet. So kann man K Schritt für Schritt zu $\tilde{K}$ deformieren, so dass sich die Parität des Innern nicht ändert und $\tilde{K}$ all seine Punkte auch dem Rand hat. In dem Fall wissen wir aber bereits, dass das Innere ungerade ist, womit der Induktionsschritt und das Lemma bewiesen ist.

4. Sei n ein natürliche Zahl. In einem Affenkäfig mit n Affen stehen n Kletterstangen. Damit die Affen etwas Bewegung bekommen platzieren die Wärter zur Fütterung jeweils eine Banane oben an jeder Stange. Zusätzlich verbinden sie die Stangen mit einer endlichen Anzahl Seile, sodass zwei verschiedene Seilenden an verschiedenen Punkten festgemacht werden. Wenn ein Affe eine Stange hochklettert und ein Seil findet, kann er nicht widerstehen und wird sich über das Seil hangeln bevor er seinen Aufstieg fortsetzt. Jeder Affe startet bei einer anderen Stange. Zeige, dass jeder Affe eine Banane kriegt.

Lösung On commence avec une observation: Si l'on connaît la position d'un singe à un certain instant, cela détermine de manière unique son parcours après mais aussi avant cet instant. (Plus précisément: pour trouver le le parcours avant le moment observé on peut simplement laisser le singe faire le chemin inverse: descendre le long de la perche et suivre toutes les cordes qu'il encontre. Pour aller en avant, simplement suivre les instructions de l'exercice.)

La conséquence de cette observation est que le chemin de n'importe quel singe est uniquement déterminé par sa position à un instant arbitraire et que le singe ne pourra pas finir dans un cycle. Si c'était le cas alors par l'observation il s'est toujours trouvé dans le cycle (et en allant en arrière et en allant en avant il retourne au même endroit.) Or il a commencé en dehors d'un cycle (en bas d'une perche) cette situation est exclue.

Donc si un singe ne peut pas se retrouver dans un cycle, il peut passer par une corde ou par un morceau de perche qu'une seule fois. (S'il y passe deux fois alors il se trouve dans un cycle.) Donc chaque singe arrivera en haut d'une perche un moment donné, au plus tard après avoir parcouru toutes les perches et toutes les cordes.

Maintenant si deux singes se trouvaient en haut de la même perche à la fin de leur parcours, l'unicité du parcours déterminé par cette position montre qu'ils ont du commencer leur parcours au même endroit, en contradiction avec l'hypothèse.

5. Finde natürliche Zahlen a, b, c, so dass die Quersumme von $a+b, b+c$ und $c+a$ jeweils kleiner als 5 ist, die Quersumme von $a+b+c$ aber grösser als 50.

Lösung Die Idee ist, zuerst die paarweisen Summen $u = a + b$, $v = b + c$ und $w = c + a$ festzulegen. Damit diese Summen wirklich zu natürlichen Zahlen a, b, c gehören, müssen sie die Seitenlängen eines nichtdegenerierten Dreiecks mit geradem

Umfang sein. Wir wählen diese Summen so, dass deren Dezimaldarstellung aus jeweils 4 Einsen und ansonsten nur Nullen bestehen. Um die Dreiecksbedingung zu erfüllen, sollten alle Zahlen dieselbe Anzahl Stellen haben und mit einer Null enden. Ausserdem gilt $a+b+c=\frac{1}{2}(u+v+w)$, also sollten die Einsen in den Dezimaldarstellungen von u, v, w möglichst an verschiedenene Stellen stehen, damit bei obiger Division durch 2 möglichst viele Fünfen produziert werden. Ein naheliegender Versuch ist

$$u = 11110000000, \quad v = 10001110000, \quad w = 10000001110,$$

also

$$a = 5554445555, \quad b = 5555554445, \quad c = 4445555555.$$

In der Tat erhält man dann

$$a+b+c = \tfrac{1}{2}(u+v+w) = \tfrac{1}{2} \cdot 31111111110 = 15555555555$$

und somit $q(a+b+c) = 51$.

6. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ so dass für alle positiven rationalen Zahlen x, y gilt

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

Lösung Mit $y = 1$ folgt

$$f\big(f(x)^2\big) = x^3 f(x), \tag{1}$$

insbesondere ist f injektiv. Ersetzt man hier x durch xy, dann erhält man

$$f\big(f(xy)^2\big) = x^3 y^3 f(xy).$$

Andererseits kann man in der ursprünglichen Gleichung y durch $f(y)^2$ ersetzen und erhält unter nochmaliger Verwendung dieser Gleichung

$$f\big(f(x)^2 f(y)^2\big) = x^3 f\big(f(y)^2 x\big) = x^3 y^3 f(xy).$$

Ein Vergleich der letzten beiden Gleichungen liefert zusammen mit der Injektivität von f schliesslich

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Wegen der Multiplikativität von f gilt insbesondere

$$f(x^m) = f(x)^m \tag{2}$$

für jede ganze Zahl m und damit auch für jede rationale Zahl m, sofern die involvierten Ausdrücke in $\mathbb{Q}^+$ liegen. Insbesondere wird (1) zu

$$f(f(x)) = \sqrt{x^3 f(x)}.$$

Weiter erhält man damit nun

$$f(xf(x)) = f(x)f(f(x)) = f(x)\sqrt{x^3 f(x)} = \big(xf(x)\big)^{3/2},$$

und mit (2) und vollständiger Induktion

$$f^n(xf(x)) = \big(xf(x)\big)^{3^n/2^n}$$

für alle natürlichen Zahlen n. Hier ist die rechte Seite für alle n eine rationale Zahl, dies ist aber nur möglich für $xf(x) = 1$. Somit gilt also $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{Q}^+$. Offensichtlich ist das wirklich eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

7. Finde alle Polynome $P \neq 0$ mit reellen Koeffizienten, welche die folgende Bedingung erfüllen:

$$P(P(k)) = P(k)^2 \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, (\deg P)^2$$

Lösung

8. Zeige, dass es mehr als 10^{13} Möglichkeiten gibt, 81 Könige so auf einem 18×18 Schachbrett zu platzieren, dass sich keine zwei Könige attackieren.
Bemerkung: Zwei Könige können sich attackieren, falls die Felder, auf denen sie stehen, eine gemeinsame Seite oder eine gemeinsame Ecke besitzen.

Lösung Sei $A_{i,j}$ das 2×2 Quadrat mit den Feldern $(2i-1, 2j-1), (2i-1, 2j), (2i, 2j-1), (2i, 2j)$. Dadurch wird das 18×18 Brett paarweise disjunkt in 81 2×2 Quadrate aufgeteilt. Falls 2 Könige auf demselbem 2×2 Quadrat stehen müssen sie sich notwendigerweise angreifen. Das heisst um eine guten Konstellation zu erhalten muss zwingenderweise jeder König sein eigenes 2×2 Quadrat besitzen. Da es 81 Könige und 81 2×2 Quadrate gibt, muss sogar auf jedem 2×2 Quadrat ein König sitzen. Daher bezeichne den König, der auf $A_{i,j}$ steht mit $K_{i,j}$. Falls der König $K_{i,j}$ auf dem Feld $(2i, 2j-1)$ oder $(2i, 2j)$ steht, so sagt man der König $K_{i,j}$ steht oben. Falls der König $K_{i,j}$ auf dem Feld $(2i, 2j)$ oder $(2i-1, 2j)$ steht, so sagt man der König $K_{i,j}$ steht rechts. Analoge Bezeichnungen für unten und links.
Man bemerkt nun folgendes: Falls der König $K_{i,j}$ oben steht, so muss zwingenderweise der König $K_{i+1,j}$ auch oben stehen, sonst attakieren sie sich gleichzeitig. Analog $K_{i,j}$ rechts $\to K_{i,j+1}$ rechts, $K_{i,j}$ unten $\to K_{i-1,j}$ unten, $K_{i,j}$ links $\to K_{i,j-1}$ links.
Das heisst bei jeder guten Konstellation gibt es in jeder Zeile und jeder Spalte eine Sprungstelle. Wir führen nun auch solche Sprungstellen ein:

$$Z(i) = \begin{cases} \min\{j | \text{Der König } K_{i,j} \text{ steht rechts}\}, & \text{falls mindestens ein König in der} \\ & i\text{-ten Zeile rechts steht} \\ 10, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S(j) = \begin{cases} \min\{i | \text{Der König } K_{i,j} \text{ steht oben}\}, & \text{falls mindestens ein König in der} \\ & j\text{-ten Spalte oben steht} \\ 10, & \text{sonst} \end{cases}$$

Jede Wahl der Sprungstellen führt zu einer eindeutigen Konstellation, insbesondere kann es daher höchstens 10^{18} gute Konstellationen geben. Was aber noch passieren kann, ist, dass der König $K_{i,j}$ noch einen der Könige $K_{i+1,j+1}, K_{i-1,j+1}, K_{i-1,j-1}, K_{i+1,j-1}$ attakiert. Aus Symmetrie beschränkt sich dies auf die Fälle $K_{i,j}$ attakiert $K_{i+1,j+1}$ oder $K_{i+1,j-1}$. Im ersten Fall kann dies nur passieren, falls $K_{i,j}$ obenrechts steht und $K_{i+1,j+1}$ untenlinks. Dies ist aber genau dann der Fall wenn $Z(i) \leq j$, $Z(i+1) \geq j+2$, $S(j) \leq i$, $S(j+1) \geq i+2$. Der zweite Fall passiert nur dann, wenn $K_{i,j}$ obenlinks steht und $K_{i+1,j-1}$ untenrechts steht. Dies ist genau dann der Fall, wenn $Z(i) \geq j+1$, $Z(i+1) \leq j-1$, $S(j) \leq i$, $S(j-1) \geq i+2$. Insbesondere machen beide Sprungstellen einen Sprung mindestens der Länge 2. Wenn man nun die Zeilensprünge irgendwie wählt und die Spaltensprünge so wählt, dass sie nur Sprünge der Länge höchsten 1 besitzt, so kriegt man eine gute Konstellation. Die folgende Rechnung die Anzahl Sequenzen der Länge 9 mit Werten in $\{1, 2, \ldots, 10\}$ und Sprüngen der Länge höchstens 1:

Länge, Endpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2
3	5	8	9	9	9	9	9	9	8	5
4	13	22	26	27	27	27	27	26	22	13
5	35	61	75	80	81	81	80	75	61	53
6	96	171	216	236	242	242	236	216	171	96
7	267	483	623	694	720	720	694	623	483	267
8	750	1373	1800	2037	2134	2134	2037	1800	1373	750
9	2123	3923	5210	5971	6305	6305	5971	5210	3923	2123

Dies gibt ein Total von 47064 solcher Sequenzen. Es gibt nun 10^9 verschiede Möglichkeiten die Zeilensprünge zu wählen und somit gibt es mindestens $47064 \cdot 10^9 > 10^{13}$ gute Konstellationen. Man kann das ganze Argument noch verfeindern indem man noch Zeilen und Spaltensprünge vertauscht und die doppelten wieder abzieht, dann kommt man auf insgesamt $2 \cdot 47064 \cdot 10^9 - 47064^2 > 9,4 \cdot 10^{13}$ gute Konstellationen.

9. In einem Dreieck ABC mit $AB \neq AC$ sei D die Projektion von A auf BC. Ferner seien E, F die Mittelpunkte der Strecken AD bzw. BC und G die Projektion von B auf AF. Zeige, dass die Gerade EF die Tangente im Punkt F an den Umkreis des Dreiecks GFC ist.

1.Lösung Sei $\alpha = \angle AFE$, dann genügt es nach dem Tangentenwinkelsatz zu zeigen, dass $\angle GCF = \alpha$. Konstruiere D' als die Spiegelung von D an F. Es gilt nun $FD = FD'$ und nach Konstruktion von E folgt $EF||AD'$. Also ist $\angle DAF = \alpha$ als Wechselwinkel. Weiter ist $\angle ADB = \angle AGB = 90°$ und deshalb $ABDG$ ein Sehnenviereck. Nach dem Potenzsatz gilt somit $FG \cdot FA = FD \cdot FB$. Wegen $FD = FD'$ und $FB = FC$ gilt also auch $FG \cdot FA = FD' \cdot FC$ was bedeuted, dass auch $AGD'C$ ein Sehnenviereck ist und daher $\angle GCF = \alpha$.

2.Lösung Sei H die Projektion von C auf die Gerade BG. Wegen $\angle BGA = 90° = \angle BDA$ ist $BGDA$ ein Sehnenviereck und es gilt $\angle DBG = \angle DAG$. Die Dreiecke BHC und ADF stimmen nun in zwei Winkeln überein und sind somit ähnlich. Da F der Mittelpunkt von BC ist, ist nach Konstruktion G der Mittelpunkt von BH. Ausserdem erinnern wir uns daran, dass E der Mittelpunkt von DA ist. Wegen der Ähnlichkeit und den Mittelpunkten folgt nun aber, dass auch die Dreiecke GHC und EDF ähnlich sind und damit $\angle FED = \angle CGH$. Schlussendlich erhalten wir:

$$\angle EFD = 90° - \angle FED = 90° - \angle CGH = \angle FGC$$

Hieraus folgt sofort das gewünschte Resultat.

10. Sei $ABCD$ ein Quadrat und M ein Punkt im Innern der Strecke BC. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BAM$ schneide die Strecke BC im Punkt E. Ferner schneide die Winkelhalbierende des Winkels $\angle MAD$ die Gerade CD im Punkt F. Zeige, dass AM und EF senkrecht aufeinander stehen.

Lösung Sei S die Projektion von E auf AM und sei T die Projektion von F auf AM. Die Dreiecke ABE und AES stimmen in allen Winkeln und einer Seite (der gemeinsamen) überein und sind somit kongruent, also gilt $AB = AS$. Dasselbe gilt für die Dreiecke ATF und AFD und es folgt $AT = AD$. Nun gilt:

$$AS = AB = AD = AT$$

und somit $S = T$, woraus die Behauptung folgt.

11. Seien $x_1, \ldots, x_8 \geq 0$ reelle Zahlen, sodass für $i = 1, \ldots, 8$ gilt $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$, wobei $x_9 = x_1$ und $x_{10} = x_2$. Beweise die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+2} \leq 1$$

und finde alle Fälle in denen Gleichheit herrscht.

1.Lösung Für $1 \leq i \leq 8$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} a_i a_{i+2} + a_{i+1} a_{i+3} &\leq (1 - a_{i+1} - a_{i+2}) a_{i+2} + a_{i+1}(1 - a_{i+1} - a_{i+2}) \\ &= (a_{i+1} + a_{i+2})(1 - a_{i+1} - a_{i+2}) \\ &\leq \tfrac{1}{4}(a_{i+1} + a_{i+2} + 1 - a_{i+1} - a_{i+2})^2 \\ &= \tfrac{1}{4}, \end{aligned}$$

dabei haben wir zuerst die Nebenbedingungen verwendet, danach AM-GM. In der ersten Abschätzung gilt genau dann Gleichheit, wenn $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 1$ oder $a_{i+2} = 0$ sowie $a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} = 1$ oder $a_{i+1} = 0$ gilt. In AM-GM gilt Gleichheit dabei genau dann, wenn $a_{i+1} + a_{i+2} = \frac{1}{2}$.

Damit erhalten wir wie gewünscht

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{8} a_i a_{i+2} &= (a_1 a_3 + a_2 a_4) + (a_3 a_5 + a_4 a_6) + (a_5 a_7 + a_6 a_8) + (a_7 a_1 + a_8 a_2) \\ &\quad + (a_2 a_4 + a_3 a_5) + (a_4 a_6 + a_5 a_7) + (a_6 a_8 + a_7 a_1) + (a_8 a_2 + a_1 a_3) \leq 2. \end{aligned}$$

Im Gleichheitsfall muss also in der Anfangsabschätzung für alle i Gleichheit gelten. Dies impliziert zuerst einmal $a_i + a_{i+1} = \frac{1}{2}$ für alle i. Wäre keine der Variablen gleich 0, dann müsste zudem jeweils $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} = 1$ gelten. Diese beiden Bedingungen widersprechen sich aber offensichtlich, somit verschwindet eine der Variablen und es folgt nun leicht, dass $(a_1, \ldots, a_8)$ gleich $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ oder geich $(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ sein muss. Dies sind in der Tat Gleichheitsfälle.

2. Lösung

Wir setzen $r = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ und $s = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$. Indem wir die Variablen gegebenenfalls zyklisch shiften können wir $r \geq s$ annehmen. Mit Hilfe der Nebenbedingungen erhalten wir

$$3(r + s) = \sum_{i=1}^{8} a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \leq 8,$$

also gilt $s \leq \frac{4}{3}$. Ausserdem ist

$$2r = \sum_{i=1}^{4} (a_{2i-1} + a_{2i+1}) \leq \sum_{i=1}^{2} (1 - a_{2i}) = 4 - s. \tag{3}$$

Wir haben nun nach AM-GM

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8} a_i a_{i+2} &= (a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_7 + a_7a_1) + (a_2a_4 + a_4a_6 + a_6a_8 + a_8a_2)\\ &= (a_1 + a_5)(a_3 + a_7) + (a_2 + a_6)(a_4 + a_8)\\ &\leq \tfrac{1}{4}(a_1 + a_5 + a_3 + a_7)^2 + \tfrac{1}{4}(a_2 + a_6 + a_4 + a_8)^2\end{aligned}$$

Nach den Abschätzungen von oben ist dies aber höchstens gleich

$$\tfrac{1}{4}(r^2 + s^2) \leq \tfrac{1}{4}((2 - \tfrac{s}{2})^2 + s^2) = 1 - \tfrac{1}{2}s + \tfrac{5}{16}s^2.$$

Die rechte Seite ist eine konvexe Funktion in s, sie nimmt ihr Maximum also an einem der Intervallendpunkte von $[0, \frac{4}{3}]$ an und eine kurze Rechung zeigt, dass das Maximum 1 für $s = 0$ angenommen wird. Gilt Gleichheit dann muss also $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$ sein. In (3) muss ebenfalls Gleichheit gelten, daraus folgt weiter $a_1 = a_5 = 1 - a_3 = 1 - a_7$. Schliesslich müssen auch die Gleichheitsbedingungen für AM-GM erfüllt sein, also $a_1 + a_5 = a_3 + a_7$. Es bleibt also nur der Fall $(a_1, \ldots, a_8) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ übrig. Lässt man schliesslich noch die Annahme $r \geq s$ fallen, erhält man den zweiten Gleichheitsfall $(a_1, \ldots, a_8) = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

12. Sei $a > 1$ eine natürliche Zahl und seien f und g Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Angenommen es gibt eine natürliche Zahl n_0, so dass $g(n) > 0$ für alle $n \geq n_0$ und

$$f(n) \mid a^{g(n)} - 1 \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Zeige, dass dann f konstant sein muss.

Lösung Wir setzen $\mathcal{P} = \{p \text{ prim} \mid \exists n \geq n_0 \text{ mit } p \,|\, f(n)\}$. Wir werden wiederholt folgende Beobachtung verwenden: Ist f ein Polynom mit ganzen Koeffizienten und ist m eine natürliche Zahl, dann gilt

$$a \equiv b \pmod{m} \qquad \Longrightarrow \qquad f(a) \equiv f(b) \pmod{m}. \tag{4}$$

Sei $p \in \mathcal{P}$ und sei $n \geq n_0$ so gewählt, dass $p \,|\, f(n)$ gilt. Nach (4) gilt dann auch $p \,|\, f(n + kp)$ für alle ganzen k. Nach Annahme haben wir also

$$p \,|\, a^{g(n+kp)} - 1 \qquad \forall k \geq 0.$$

Nach dem kleinen Satz von Fermat hängt die Restklasse (mod p) einer Zahl der Form b^m nur von der Restklasse (mod $p - 1$) des Exponenten m ab. Wegen $p \equiv 1$ (mod $p - 1$) und (4) gilt somit

$$1 \equiv a^{g(n+kp)} \equiv a^{g(n+k)} \pmod{p} \qquad \forall k \geq 0.$$

Wiederum nach (4) gilt also $a^{g(m)} \equiv 1 \pmod{p}$ für *alle* ganzen Zahlen m. Insbesondere können wir das für $m = n_0$ anwenden und erhalten, dass p ein Primteiler der Zahl $a^{g(n_0)} - 1$ ist. Da p beliebig war und da letztere Zahl sicher nur endlich viele verschiedene Primteiler besitzt, ist $\mathcal{P}$ also endlich.

Es genügt folglich zu zeigen, dass für nicht konstante Polynome $f = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ die Menge $\mathcal{P}$ nie endlich ist. Für $a_0 = 0$ ist dies klar, sei also $a_0 \neq 0$. Für den Beweis nehmen wir an, dass $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$ endlich ist. Für jede natürliche Zahl k gilt dann

$$\frac{1}{a_0} f(ka_0p_1 \cdots p_r) \equiv 1 \pmod{p_1 \cdots p_r}$$

wobei die Zahl links ganz ist. Wir können nun k so wählen, dass $ka_0p_1 \cdots p_r \geq n_0$ und $|f(ka_0p_1 \cdots p_r)| > |a_0|$ gilt (denn f ist nicht konstant). Die obige Kongruenz zeigt dann aber, dass $\mathcal{P}$ eine weitere Primzahl verschieden von $p_1, \ldots, p_r$ enthalten muss, ein Widerspruch.

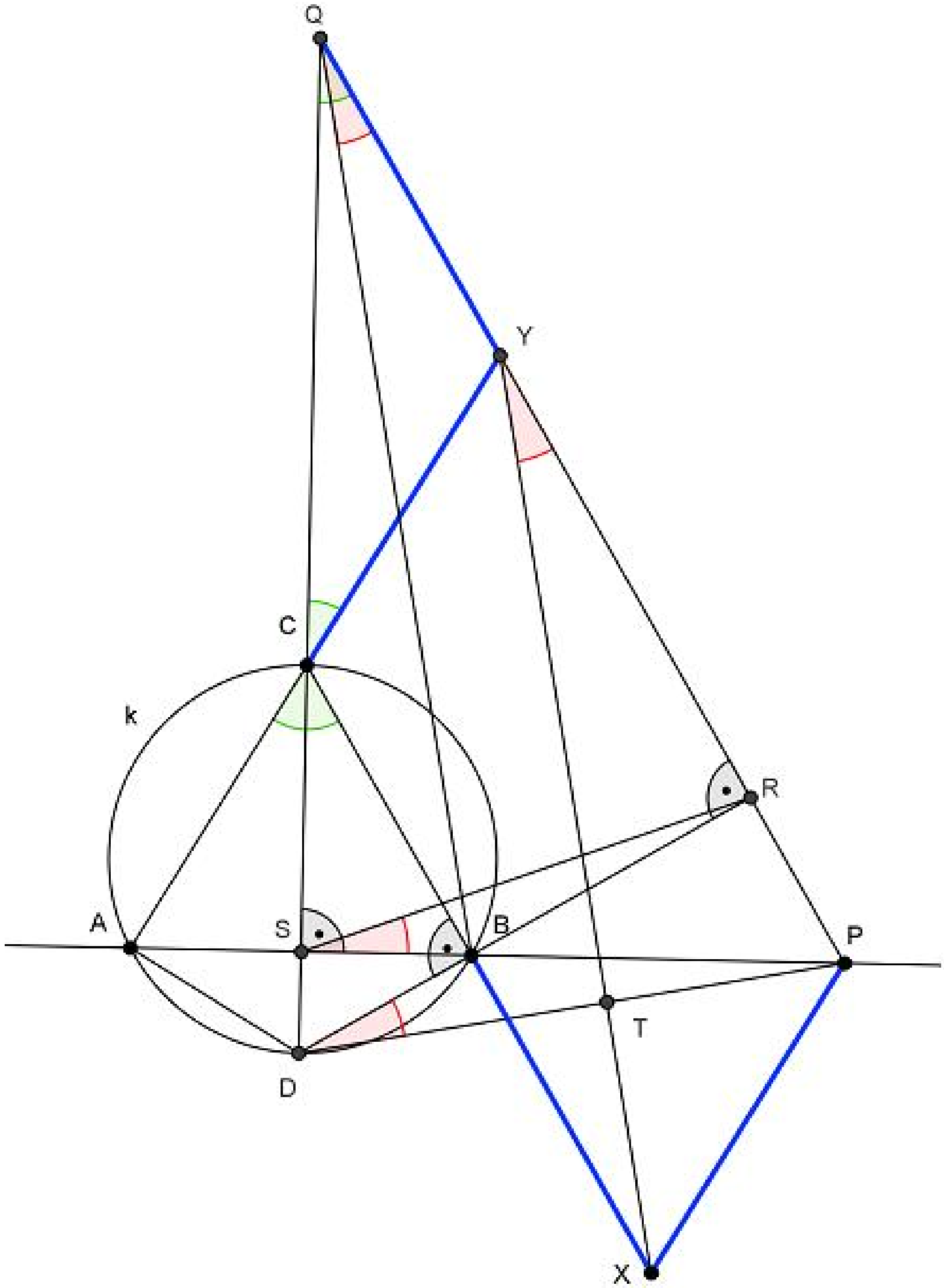

Abbildung 2: Aufgabe 2, 2.Lösung