OSM Tour final 2011

premier examen - le 11 mars 2011

Durée : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Lors d'une fête, 2011 personnes sont assises à une table ronde avec un verre de sirop à la menthe sucrée dans la main. Pendant chaque unité de temps, un nombre quelconque de personnes fait santé en respectant les règles suivantes :

(a) Pendant une unité de temps, chacun ne peut faire santé qu'avec une autre personne.

(b) On ne croise pas en faisant santé.

Combien d'unités de temps sont nécessaires, au minimum, pour que tout le monde aie fait santé avec tout le monde ?

2. Soit ABC un triangle aigu. Soient D, E et F des points sur BC, CA et AB, tels que :

$$\angle AFE = \angle BFD, \quad \angle BDF = \angle CDE, \quad \angle CED = \angle AEF$$

Montrer que D, E et F sont les pieds des hauteurs du triangle.

3. Trouver la plus petite valeur de l'expression

$$|2011^m - 45^n|$$

pour des nombres naturels m et n.

4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $a, b, c, d > 0$ avec $abcd = 1$ on a :

$$(f(a) + f(b))(f(c) + f(d)) = (a + b)(c + d)$$

5. Les tangentes en A et B du cercle circonscrit du triangle ABC se coupent en T. Le cercle passant par A, B et T recoupe BC et AC en D et E. CT coupe BE en F. On suppose que D est le milieu de BC. Calculer le rapport $BF : FE$.

Bonne chance !

OSM Tour final 2011

deuxième examen - le 12 mars 2011

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Soient $a, b, c, d > 0$ des nombres réels positifs avec $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{2}{(a+b)(c+d)} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{cd}}.$$

7. Trouver tous les nombres $z \in \mathbb{Z}$, tels que

$$2^z + 2 = r^2$$

où $r \in \mathbb{Q}$ est un nombre rationel.

8. Soit $ABCD$ un parallélogramme et H l'orthocentre du triangle ABC. La parallèle à AB passant par H coupe BC en P et AD en Q. La parallèle à BC passant par H coupe AB en R et CD en S. Montrer que P, Q, R et S sont sur un cercle.

9. Soit n un nombre naturel. Soit $f(n)$ le nombre de diviseurs de n qui se terminent par le chiffre 1 ou 9 et soit $g(n)$ le nombre de diviseurs de n qui se terminent avec le chiffre 3 ou 7. Montrer que $f(n) \geq g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Sur chaque case d'un échiquier, il y a deux punaises. Chaque punaise se déplace sur une case adjacente. Deux punaises qui se trouvent sur la même case se déplacent sur deux cases distinctes. Quel est le nombre maximal de cases qui peuvent être vide après le déplacement?

Bonne chance !