OSM Tour final 2010

premier examen - le 12 mars 2010

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trois jetons se trouvent sur des points à coordonnées entières de la droite réelle. A chaque étape du jeu on choisit deux jetons; on déplace l'un d'entre eux de 1 vers la droite et l'autre de 1 vers la gauche. Pour quelles positions de départ peut-on trouver une suite de déplacements permettant d'amener tous les jetons en un seul point?

2. Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC avec $AB \neq AC$. Les côtés BC, CA et AB sont tangents au cercle inscrit aux points D, E et F respectivement. Soit M le milieu du segment EF et supposons que la droite AD coupe le cercle inscrit au point $P \neq D$. Montrer que $PMID$ est un quadrilatère inscrit.

3. Soit n un nombre naturel. Déterminer le nombre de paires (a, b) de nombres naturels telles que

$$(4a - b)(4b - a) = 2010^n.$$

4. Soient $x, y, z > 0$ des nombres réels satisfaisant $xyz = 1$. Montrer l'inégalité

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x + y + z.$$

5. On considère les sommets d'un n-gone régulier; en parcourant des côtés et des diagonales on les relie entre eux de façon à obtenir un parcours fermé passant exactement une fois par chaque sommet. Une *paire parallèle* est un ensemble de deux segments parallèles appartenant à ce parcours. Prouver les assertions suivantes:

(a) Si n est pair alors il existe au moins une paire parallèle.

(b) Si n est impair alors il n'existe jamais exactement une paire parallèle.

OSM Tour final 2010

deuxième examen - le 13 mars 2010

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y).$$

pour tous les nombres réels x et y.

7. Soient m et n des nombres naturels. On suppose que $m+n+1$ est un nombre premier qui divise $2(m^2 + n^2) - 1$. Montrer que $m = n$.

8. Dans un village ayant au moins un habitant il existe plusieurs associations. Chaque habitant du village est membre d'au moins k associations et deux associations distinctes ont au plus un membre en commun. Montrer qu'il existe au moins k associations qui ont le même nombre de membres.

9. Soient k et k' deux cercles centrés en un même point O. On suppose que le cercle k' est plus grand que le cercle k. Une droite passant par O coupe k au point A et k' au point B de sorte que O soit entre A et B. Une deuxième droite passant par O coupe k au point E et k' au point F de sorte que E soit entre O et F. Montrer que le cercle circonscrit de OAE, le cercle de diamètre AB et le cercle de diamètre EF ont un point d'intersection commun.

10. Soit $n \geq 3$ et soit P un n-gone convexe. Montrer que l'on peut découper P en triangles le long de $n-3$ diagonales qui ne se coupent pas, de telle sorte que le cercle circonscrit de chaque triangle contienne tout P. Quand une telle décomposition est-elle unique?