Lösungen zur Vorrundenprüfung 2009

Zuerst einige Bemerkungen zum Punkteschema. Eine vollständige und korrekte Lösung einer Aufgabe ist jeweils 7 Punkte wert. Für komplette Lösungen mit kleineren Fehlern oder Ungenauigkeiten, die aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Richtigkeit der dargestellten Lösung haben, geben wir 6 Punkte. Bei unvollständigen Lösungen wird der Fortschritt und der Erkenntnisgewinn bewertet (Teilpunkte). Oft gibt es mehrere Lösungen für ein Problem. Versucht jemand zum Beispiel eine Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen zu lösen, erreicht auf dem ersten Weg 3 Punkte, auf dem zweiten 2 Punkte, dann wird seine Punktzahl nicht 5, sondern 3 sein. Punkte, die auf verschiedenen Wegen erreicht werden, sind also *nicht* kumulierbar. Die unten angegebenen Bewertungsschemata sind nur Orientierungshilfe. Gibt jemand eine alternative Lösung, dann werden wir versuchen, die Punktzahl entsprechend zu wählen, dass für gleiche Leistung gleich viele Punkte verteilt werden. Die Schemata sind stets wie folgt zu interpretieren:
Kommt jemand in seiner Lösung bis und mit hierhin, dann gibt das soviele Punkte.
Ausnahmen von dieser Regel sind jeweils ausdrücklich deklariert.

1. Finde alle natürlichen Zahlen $n > 1$, sodass $(n-1)!$ durch n teilbar ist.

1. Lösung:

Wir nennen n *gut*, falls n ein Teiler von $(n-1)!$ ist. Sei p der kleinste Primteiler von n. Dann ist die natürliche Zahl $\frac{n}{p}$ entweder gleich 1 oder gleich p oder grösser als p. Wir unterscheiden nun diese drei Fälle.

- Ist $n = p$ prim, dann ist jede der Zahlen $1, 2, \ldots, (n-1)$ teilerfremd zu n, also auch deren Produkt $(n-1)!$. Somit ist n schlecht.
- Ist $n = p^2$ mit $p \geq 3$, dann gilt $p < 2p < n$. Daraus folgt $n \,|\, p \cdot 2p \,|\, (n-1)!$ und n ist gut. Für $p = 2$ hingegen ist 4 kein Teiler von $3! = 6$, folglich ist $n = 4$ schlecht.
- Ist $\frac{n}{p} > p$, dann gilt $p < \frac{n}{p} < n$. Daraus folgt $n \,|\, p \cdot \frac{n}{p} \,|\, (n-1)!$ und n ist gut.

Insgesamt sind also alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gut, ausser die Primzahlen und $n = 4$.

2. Lösung:

Wir nennen n *zerlegbar*, falls $n = ab$ gilt mit $2 \leq a < b$. Alle zerlegbaren Zahlen sind gut, denn a und b sind verschieden und kleiner als n, daher gilt $n = a \cdot b \,|\, (n-1)!$. Ausserdem ist n zerlegbar, falls n durch zwei verschiedene Primzahlen $p < q$ teilbar ist (setze $a = p$, $b = \frac{n}{p} \geq q > a$), oder falls n durch die dritte Potenz einer Primzahl p

teilbar ist (setze $a = p$ und $b = \frac{n}{p} \geq p^2 > a$). Es genügt also die Fälle zu betrachten, wo n eine Primzahl oder das Quadrat einer Primzahl ist. Dazu verfährt man wie in der ersten Lösung.

Bemerkungen und Punkteschema:

Ein Beweis, dass die überwiegende Mehrheit der natürlichen Zahlen gut ist, gibt 3P. Genauer sollte dieses Argument entweder alle ausser ganz wenige (≤ 4) Typen von Primfaktorzerlegungen behandeln, oder eine Reduktion auf den Fall von Quadratzahlen oder Primpotenzen sein. Ein Lösungsversuch, welcher kein derartiges Argument enthält, ist insgesamt höchstens 3P wert.
Die Behandlung dieser Spezialfälle wird jeweils zusätzlich so bewertet:

- Primzahlen (mit Begründung): 1P
- Primquadrate oder -potenzen oder Quadratzahlen: 2P, falls die Unterscheidung $n = 4$, $n > 4$ korrekt durchgeführt wird. Sonst höchstens 1P.

Vollständige Lösung 7P, bei kleinen Ungenauigkeiten 6P. Eine Lösung, welche den Fall $n = 4$ nicht richtig behandelt, ist höchstens 5 Punkte wert.

2. Betrachte n Kinder, von denen keine zwei gleich gross sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Kinder in eine Reihe zu stellen, sodass jedes Kind ausser dem grössten einen Nachbarn besitzt, der grösser ist als es.

1. Lösung:

Wir gehen vom grössten Kind aus. Das zweitgrösste muss links oder rechts daneben stehen, sonst wäre(n) sein(e) Nachbar(n) kleiner als es. Das drittgrösste muss wiederum direkt neben diesem Pärchen stehen, das viertgrösste direkt neben dieser Dreiergruppe usw. Insgesamt gibt ab dem zweitgrössten Kind also jeweils 2 mögliche Positionen und insgesamt 2^{n-1} solche Anordnungen.

2. Lösung:

Sei K die Menge, welche alle Kinder ausser dem grössten enthält. Sei A die Menge der Kinder, die rechts vom grössten stehen. Die Angabe der Menge A bestimmt die gesamte Anordnung, denn die Kinder in A müssen von links nach rechts in der Grösse absteigend angeordnet sein, die Kinder in $K \setminus A$ müssen von links nach rechts in der Grösse ansteigend angeordnet sein. Dies liefert eine Bijektion zwischen der Menge der gesuchten Anordnungen und der Menge der Teilmengen von K. Letztere hat aber 2^{n-1} Elemente.

Bemerkungen und Punkteschema:

Folgende Punkte können bei einer unvollständigen Lösung unabhängig voneinander geholt werden:

- Richtige Antwort 2^{n-1} aufgrund der Untersuchung kleiner Fälle: 1P.

- Die Erkenntnis ohne Beweis, dass die Kinder der Grösse nach auf beiden Seiten zum grössten hin ansteigen 2P, mit Beweis 3P.

Vollständige Lösung 7P, bei kleinen Ungenauigkeiten (zum Beispiel bei der Bijektion) 6P.

3. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = 60°$. Die Punkte D und E liegen auf den Seiten AC bzw. AB. Die Geraden BD und CE schneiden den Umkreis von ABC in den weiteren Punkten X bzw. Y. Der Schnittpunkt von BD und CE sei S. Beweise, dass die Geraden BY und CX genau dann parallel sind, wenn $AESD$ ein Sehnenviereck ist.

Lösung:

Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle BYC = \angle BXC = \angle BAC = 60°.$$

Mit Hilfe von Winkeljagd und der Winkelsumme im Dreieck SCX erhält man folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & \angle BYC = \angle YCX \\ \Leftrightarrow\ & \angle SCX = 60° \\ \Leftrightarrow\ & \angle 180° - 60° - \angle CSX = 60° \\ \Leftrightarrow\ & \angle CSX = 60° \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist äquivalent dazu, dass BY und CX parallel sind, und die letzte Gleichung dazu, dass $ESDA$ ein Sehnenvierreck ist.

Bemerkungen und Punkteschema:

Viele haben nur eine Richtung bewiesen und vergessen zu argumentieren warum die Gegenrichtung ebenfalls stimmt, dies gab 4P. Je einen Teilpunkt konnte geholt werden für die Beobachtung, dass $AESD$ genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn $\angle DSE = 120°$ gilt und für die Anwendung des Peripheriewinkelsatzes zur Berechnung der Winkel $\angle CYB$ und $\angle CXB$. Eine vollständige Lösung gab 7P, wobei 1-2P für kleine Fehler und Lücken in der Argumentation abgezogen wurden.

4. Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$a^{6a} = b^b.$$

1. Lösung:

Es gilt $6a > b$, denn sonst wäre $b^b \geq (6a)^{6a} > a^{6a}$. Division durch a^b ergibt die neue Gleichung

$$a^{6a-b} = \left(\frac{b}{a}\right)^b,$$

in der die linke Seite nach dem eben Gesagten ganz ist, also auch die rechte. Somit ist a ein Teiler von $b = ka$ und die Ungleichung $6a > b$ übersetzt sich zu $1 \leq k < 6$. Setzt man $b = ka$ in die ursprüngliche Gleichung ein, zieht die a-te Wurzel und formt um, dann folgt $a^{6-k} = k^k$. Durchtesten der Fälle $k = 1, \ldots, 5$ ergibt für das Paar (a, b) die folgenden Möglichkeiten:

$$(1, 1), \quad (3, 3^2), \quad (4^2, 4^3), \quad (5^5, 5^6).$$

2. Lösung:

Alternativ lässt sich auch so zeigen, dass a ein Teiler von b ist: Setze $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ und schreibe $a = xd$, $b = yd$, dann sind x und y teilerfremd. Einsetzen liefert $d^{6a-b}x^{6a} = y^b$, und wegen $6a > b$ sind hier alle Exponenten positiv. Dies zeigt, dass x ein Teiler von y^b ist, wegen der Teilerfremdheit von x und y folgt also $x = 1$, somit ist a ein Teiler von b.

3. Lösung:

Sicher ist $(a, b) = (1, 1)$ ein Lösungspaar und für jedes andere gilt $a, b > 1$. Dies nehmen wir nun an, es ist dann $a < b < 6a$. Sei p eine Primzahl und p^r bzw. p^s die grösste p-Potenz, welche a bzw. b teilt. Offenbar gilt $r > 0 \Leftrightarrow s > 0$ und Einsetzen und Exponentenvergleich zeigt $\frac{s}{r} = \frac{6a}{b} > 1$. Daraus folgt einerseits, dass a ein Teiler von b ist, und andererseits, dass a, b und $\frac{b}{a}$ dieselben Primfaktoren besitzen. Wegen $1 < \frac{b}{a} < 6$ sind daher diese drei Zahlen alle Potenzen derselben Primzahl $p \leq 5$. Genauer gilt $a = p^r$ und $b = p^s$ mit $p = 2$ und $s \leq r+2$ oder mit $p = 3, 5$ und $s = r+1$. Durchtesten dieser Fälle liefert alle fehlenden Lösungspaare.

4. Lösung:

Wir beginnen mit folgendem allgemeinem

Lemma 1. *Gilt $a^m = b^n$ mit natürlichen Zahlen a, b, m, n, dann existieren natürliche Zahlen c, x und y mit $a = c^x$ und $b = c^y$.*

Beweis. Setze $g = \text{ggT}(m, n)$ und schreibe $m = yg$, $n = xg$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen x, y. Einsetzen zeigt $a^y = b^x$ und aus der Teilerfremdheit von x und y folgt, dass $a = c^x$ eine x-te Potenz einer natürlichen Zahl und $b = d^y$ eine y-te Potenz einer natürlichen Zahl ist. Einsetzen ergibt $c = d$ und dies liefert die Behauptung. □

Aus der Ungleichung $a \leq b < 6a$ folgt nun $1 \leq c^{y-x} = \frac{b}{a} < 6$. Somit gilt entweder $c = 1$ oder $c = 2$ und $y \leq x + 2$ oder $c = 3, 4, 5$ und $y = x + 1$. Durchtesten dieser Fälle liefert alle Lösungen.

Bemerkungen und Punkteschema:

Beweis, dass a ein Teiler von b ist, oder einer für die Lösung gleichwertigen Aussage wie zum Beispiel das Lemma 1: 3P. Reduktion auf wenige (≈ 6) einfach durchzutestenden Fälle: 5P. Vollständige Lösung 7P, bei kleinen Ungenauigkeiten 6P.

5. Für welche natürlichen Zahlen m, n lässt sich ein $m \times n$-Rechteck mit lauter Quadraten der Seitenlänge 2 oder 3 bedecken?

1. Lösung:

Genau dann, wenn m und n beide gerade oder beide durch 3 teilbar sind, oder wenn eine der Zahlen durch 6 teilbar und die andere grösser als 1 ist.

Wir zeigen zuerst, dass diese Bedingungen hinreichend sind. Für $2 \mid m, n$ bzw. $3 \mid m, n$ lässt sich das Rechteck mit lauter 2×2-Quadraten bzw. lauter 3×3-Quadraten bedecken. Für den dritten Fall beachte man, dass sich 6×2- und 6×3-Rechtecke aus solchen Quadraten bilden lassen, und somit auch jedes Rechteck der Grösse $6k \times (2a + 3b)$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen a, b. Es lässt sich aber jede natürliche Zahl > 1 in der Form $2a + 3b$ schreiben.

Wir zeigen nun umgekehrt, dass dies auch notwendig ist. Sei das $m \times n$-Rechteck also überdeckbar und sei m die Anzahl Spalten und n die Anzahl Zeilen. Nehme an, m sei ungerade, und färbe die Spalten abwechselnd schwarz und weiss. Jedes 2×2-Rechteck bedeckt genauso viele schwarze wie weisse Felder, bei einem 3×3-Rechteck ist die die Differenz zwischen der Anzahl überdeckter weisser und schwarzer Felder stets gleich ± 3. Daraus folgt, dass die Differenz zwischen der Gesamtzahl weisser und schwarzer Felder auf dem Brett durch 3 teilbar sein muss, diese Differenz ist aber genau n. Somit ist m gerade oder n durch 3 teilbar. Analog zeigt man, dass m durch 3 teilbar oder n gerade sein muss. Kombination dieser beiden Aussagen liefert, dass m und n beide gerade oder beide durch 3 teilbar sind, oder dass eine der beiden durch 6 teilbar ist. Im letzten Fall ist die zweite Seitenlänge aber trivialerweise > 1.

2. Lösung:

Wir geben ein anderes Argument dafür, dass m gerade oder n durch 3 teilbar sein muss. Nehme an nicht. Im Fall $n \equiv 1 \pmod 3$ färbe man die Zeilen mit Nummern $\equiv 1, 2 \pmod 3$ schwarz, Im Fall $n \equiv 2 \pmod 3$ die Zeilen mit Nummern $\equiv 0, 1 \pmod 3$. Da m ungerade ist, gibt es in beiden Fällen eine ungerade Anzahl schwarzer Felder auf dem Brett. Andererseits bedeckt jedes Quadrat eine gerade Anzahl schwarzer Felder, ein Widerspruch.

Bemerkungen und Punkteschema:

Unabhängig voneinander:

- Angabe der vollständigen Liste der möglichen Fälle ohne Beweis für den dritten Fall: 1P. Mit Beweis für den dritten Fall: 2P.
- Angabe einer Färbung, die eine nutzbare Eigenschaft bezüglich 2×2- und 3×3-Quadrate besitzt, welche zu einer nichttrivialen Aussage führen kann, *und* explizite Erwähnung dieser Eigenschaft: 2P. Genauer:
  - Die Schachbrettfärbung oder Standard-3-Färbung besitzt eine solche nutzbare Eigenschaft, diese liefert aber nur Trivialitäten. Das gibt daher keine Punkte.
  - Spalten-/Zeilenfärbungen vom Typ swsw.. oder sswssw.. wären die 2P wert.

  Ein Beweis, dass n gerade oder m durch 3 teilbar sein muss, ohne die duale Aussage: 4P.
  Vollständiger Beweis, dass nur die genannten Fälle möglich sind: 5P.