OSM - Tour préliminaire

Bellinzone, Lausanne, Zurich - 10 janvier 2009

Durée: 3 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver tous les nombres naturels $n > 1$ tels que $(n-1)!$ est divisible par n.

2. Considérons n enfants parmi lesquels il n'y en a pas deux qui ont la même taille. Combien y a-t-il de manières d'aligner les enfants de sorte que chaque enfant, à l'exception du plus grand, ait un voisin qui est plus grand que lui.

3. Soit ABC un triangle avec $\angle BAC = 60°$. Les points D et E sont situés sur les cotés AC et AB respectivement. Les points d'intersection du cercle circonscrit de ABC avec les droites BD et CE sont X et Y respectivement. Soit S le point d'intersection de BD et CE. Montrer que les droites BY et CX sont parallèles si et seulement si $AESD$ est un quadrilatère inscrit.

4. Trouver toutes les paires (a, b) de nombres naturels telles que l'équation suivante est satisfaite:

$$a^{6a} = b^b.$$

5. Pour quels nombres naturels m et n peut-on couvrir complètement et sans chevauchement un rectangle $m \times n$ avec des carrés de taille 2×2 et 3×3?

Bonne chance!