OSM Tour final 2009

premier examen - 13 mars 2009

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit P un hexagone régulier. Pour un point A soient $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_6$ les distances de A aux six sommets de P dans l'ordre croissant. Trouver le lieu géométrique de tous les points A à l'intérieur ou sur le bord de P, tels que

(a) d_3 prend la plus petite valeur possible.

(b) d_4 prend la plus petite valeur possible.

2. Un *palindrome* est un nombre naturel dont la représentation dans le système décimal se lit de la même façon dans les deux sens (par exemple 1129211 ou 7337). Déterminer toutes les paires (m, n) de nombres naturels telles que

$$(\underbrace{11\ldots11}_{m}) \cdot (\underbrace{11\ldots11}_{n})$$

est un palindrome.

3. Soient a, b, c, d des nombres réels positifs. Prouver l'inéquation suivante et déterminer tous les cas d'égalité:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

4. Soit n un nombre naturel. Chaque case d'un carré $n \times n$ contient un parmi n symboles différents de manière à ce que chaque symbole apparaisse exactement n fois. Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne qui contient au moins $\sqrt{n}$ symboles différents.

5. Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$ et de centre I de cercle inscrit. Le cercle inscrit est tangent à BC en D. Soit M le milieu du côté BC. Montrer que la droite IM coupe le segment AD en deux parties égales.

OSM Tour final 2009

deuxième examen - 14 mars 2009

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ qui pour tout $x > y > z > 0$ satisfont la relation suivante:

$$f(x-y+z) = f(x) + f(y) + f(z) - xy - yz + xz.$$

7. Les points A, M_1, M_2 et C se trouvent dans cet ordre-là sur une droite. Soit k_1 le cercle de centre M_1 passant par A et k_2 le cercle de centre M_2 passant par C. Les deux cercles se coupent aux points E et F. Une tangente commune de k_1 et k_2 est tangente à k_1 en B et à k_2 en D. Montrer que les droites AB, CD et EF se coupent en un seul point.

8. On considère un terrain quelconque composé de n carrés unité. Alice et Bertrand aimeraient recouvrir le terrain de carreaux qui ont soit la forme d'un domino de taille 1×2, soit la forme d'un T-tetromino. Alice n'a que des carreaux d'une seule couleur à disposition, tandis que Bertrand a des dominos en deux couleurs et des tetrominos en quatre couleurs. Alice peut couvrir le terrain de a façons différentes, Bertrand de b façons. Trouver le rapport b/a en supposant qu'on a $a \neq 0$.

9. Trouver toutes les fonctions injectives $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout nombre naturel n on a

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n)+n}{2}.$$

10. Soit $n > 3$ un nombre naturel. Montrer que $4^n + 1$ admet un diviseur premier > 20.