OSM - Tour préliminaire

Lausanne, Zurich - 12 janvier 2008

Durée: 3 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit cinq diviseurs positifs de 10^{2008} donnés. Montrer qu'il y en a toujours deux dont le produit est un carré.

2. Un *chemin* dans le plan mène du point $(0,0)$ au point $(6,6)$ en se déplaçant à chaque pas soit de 1 à droite soit de 1 vers le haut. Combien de tels chemins y a-t-il qui ne passent ni par le point $(2,2)$ ni par le point $(4,4)$?

3. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit avec $CD < AD$ et $CD < BC$. Les diagonales AC et BD s'intersectent en S. Soit e la réflexion de la droite AB à AC et soit f la réflexion de la droite AB à BD. La droite CD intersecte e et f en E et F, respectivement. Montrer que le triangle SEF est isocèle.

4. Trouver tous les nombres naturels n tels que le nombre de diviseurs positifs de n est égal au troisième plus petit diviseur positif de n.

5. Un damier est composé de $2n \times 2n$ cases. Nous voulons colorier n de ces cases de telle manière à ce qu'il n'y en ait pas deux qui se trouvent dans la même ligne ou dans des lignes voisines et qu'il n'y en ait pas non plus deux qui se trouvent dans la même colonne ou dans des colonnes voisines. Combien de manières à procéder y a-t-il?

Bonne chance!