OSM Tour final 2008

Premier examen - 14 mars 2008

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit ABC un triangle avec $\sphericalangle BAC \neq 45°$ et $\sphericalangle ABC \neq 135°$. Soit P le point sur la droite AB tel que $\sphericalangle CPB = 45°$. Soient O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits des triangles ACP et BCP. Montrer que l'aire du quadrilatère CO_1PO_2 est égale à l'aire du triagle ABC.

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $x, y > 0$ on a

$$f(xy) \leq \frac{xf(y) + yf(x)}{2}.$$

3. On considère les entiers de la forme

$$2^{5^{2^{5^{\cdot^{\cdot}}}}} + 4^{5^{4^{5^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

tels que les tours de puissances ont des hauteurs quelconques ≥ 3 et pas forcément identiques. Montrer que chaque tel nombre est divisible par 2008.

4. On considère trois faces d'un dé $n \times n \times n$ qui se rencontrent en un sommet. Pour quels n est-t-il possible de les couvrir complètement et sans chevauchement avec des bandes de papier de taille 3×1? Les bandes de papier peuvent être collées par-dessus les arètes entre ces faces.

5. Soit $ABCD$ un carré de longueur de côté 1. Déterminer le lieu géométrique de tous les points P ayant la propriété

$$AP \cdot CP + BP \cdot DP = 1.$$

OSM tour final 2008

Deuxième examen - 15 mars 2008

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Déterminer tous les nombres naturels impairs de la forme

$$\frac{p+q}{p-q}$$

où $p > q$ sont des nombres premiers.

7. Un rectangle 8×11 est coupé en 21 morceaux de telle manière à ce que chaque morceau soit connexe et constitué de carrés unités. Montrer qu'au moins deux de ces morceaux ont la même forme, à rotations et symétries près.

8. Soit $ABCDEF$ un hexagone ayant un cercle circonscrit. Montrer que les diagonales AD, BE et CF s'intersectent en un point si et seulement si on a

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

9. On considère sept droites distinctes dans le plan. Un point est appelé *gentil* s'il se trouve sur au moins trois de ces droites. Déterminer le nombre maximal de points gentils.

10. Trouver toutes les paires (α, β) de nombres réels positifs satisfaisant les conditions suivantes:

(a) Pour tous les nombres réels positifs x, y, z, w on a

$$x + y^2 + z^3 + w^6 \geq \alpha(xyzw)^\beta.$$

(b) Il existe un quadruple (x, y, z, w) de nombres réels positifs, tel que dans (a) on a égalité.