

Sélection OIM 2008

Premier examen - 17 mai 2008

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver tous les triples (a, b, c) de nombres naturels tels que

$$a \mid bc - 1, \quad b \mid ca - 1, \quad c \mid ab - 1.$$

2. Soient m, n des nombres naturels. Considérons une grille quadratique de points, composée de $(2m + 1) \times (2n + 1)$ points dans le plan. Un ensemble de rectangles s'appelle *bon* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) Les sommets de chaque rectangle se trouvent sur les points de la grille et les côtés sont parallèles aux côtés de la grille.
- (b) Il n'y a pas deux rectangles ayant un sommet commun.

Déterminer la plus grande valeur que la somme des aires des rectangles se trouvant dans un bon ensemble peut prendre.

3. Soit ABC un triangle avec $\angle ABC \neq \angle BCA$. Le cercle inscrit k du triangle ABC est tangente aux côtés BC, CA resp. AB aux points D, E resp. F . Le segment AD coupe k une deuxième fois en P . Soit Q le point d'intersection de EF avec la droite perpendiculaire à AD passant par P . Soit X , resp. Y le point d'intersection de AQ avec DE , resp. DF . Montrer que A est le milieu du segment XY .

Sélection OIM 2008

Deuxième examen - 18 mai 2008

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

4. Deux cercles k_1 et k_2 se coupent en A et en B . Soit r une droite passant par B , coupant k_1 en C et k_2 en D , telle que B se trouve entre C et D . Soit s la droite parallèle à AD qui est tangente à k_1 en E et qui se trouve à distance minimale de AD . La droite AE coupe k_2 en F . Soit t la droite tangente à k_2 passant par F . Montrer les assertions suivantes :

- (a) La droite t est parallèle à AC .
- (b) Les droites r , s et t se coupent en un point.

5. Soient a, b, c des nombres réels positifs. Montrer l'inégalité suivante :

$$\frac{a}{\sqrt{3a+2b+c}} + \frac{b}{\sqrt{3b+2c+a}} + \frac{c}{\sqrt{3c+2a+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a+b+c}.$$

6. Un 2008-gone régulier est découpé en triangles à l'aide de 2005 diagonales qui ne s'intersectent pas. Déterminer le nombre maximal de triangles isocèles auquel on peut parvenir dans une telle décomposition.

Sélection OIM 2008

Troisième examen - 24 mai 2008

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soient a, b des nombres naturels. Montrer que l'on peut colorier les nombres entiers avec trois couleurs de façon à ce que deux entiers dont la différence vaut a ou b soient toujours de couleurs différentes.

8. Soit ABC un triangle et D un point sur le segment BC . Soit X un point à l'intérieur du segment BD et soit Y le point d'intersection de AX avec le cercle circonscrit de ABC . Soit P le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits de ABC et de DXY . Montrer que P est indépendant du choix de X .

9. Soit \mathbb{R}^+ l'ensemble des nombres réels positifs. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que pour $x, y > 0$ on a

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

Sélection OIM 2008

Quatrième examen - 25 mai 2007

Durée : 4.5 heures

Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit $P(x) = x^4 - 2x^3 + px + q$ un polynôme à coefficients réels dont toutes les racines sont des nombres réels. Montrer que la plus grande racine se trouve dans l'intervalle $[1, 2]$.

11. Soit $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ une suite de nombres entiers. Le *successeur* de A est la suite $A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ avec

$$a'_k = |\{i < k \mid a_i < a_k\}| - |\{i > k \mid a_i > a_k\}|.$$

Soit A_0 une suite finie de nombres entiers et pour $k \geq 0$ soit $A_{k+1} = A'_k$ le successeur de A_k . Montrer qu'il existe un nombre naturel m avec $A_m = A_{m+1}$.

12. Soient x, y, n des nombres naturels avec $x \geq 3$, $n \geq 2$ et

$$x^2 + 5 = y^n.$$

Montrer que tout diviseur p de n satisfait la relation de congruence $p \equiv 1 \pmod{4}$.