OSM Tour final 2007

premier examen - le 23 mars 2007

Durée : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Déterminer toutes les solutions réelles positives du système d'équations suivant :

$$a = \max\{\tfrac{1}{b}, \tfrac{1}{c}\} \qquad b = \max\{\tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{d}\} \qquad c = \max\{\tfrac{1}{d}, \tfrac{1}{e}\}$$
$$d = \max\{\tfrac{1}{e}, \tfrac{1}{f}\} \qquad e = \max\{\tfrac{1}{f}, \tfrac{1}{a}\} \qquad f = \max\{\tfrac{1}{a}, \tfrac{1}{b}\}$$

2. Soient a, b, c trois nombres entiers tels que $a + b + c$ soit divisible par 13. Montrer que

$$a^{2007} + b^{2007} + c^{2007} + 2 \cdot 2007abc$$

est également divisible par 13.

3. On subdivise le plan en carrés d'unité et on colorie chaque carré en une couleur choisie parmi n de sorte que si l'on couvre quatre carrés par un L-tetromino, alors ils sont de couleurs différentes (le L-tetromino peut être retourné dans tous les sens). Trouver la plus petite valeur de n pour laquelle une telle coloration est possible.

4. Soit ABC un triangle aigu avec $AB > AC$ et l'orthoncentre H. Soit D le pied de la hauteur passant par A sur BC. Soit E l'image de C par la symétrie par rapport à D. Les droites AE et BH se coupent au point S. Soit N le milieu de AE et M le milieu de BH. Démontrer que MN est perpendiculaire à DS.

5. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ayant les propriétés suivantes :

(a) $f(1) = 0$,

(b) $f(x) > 0$ pour tout $x > 1$,

(c) Pour tout $x, y \geq 0$ avec $x + y > 0$ on a

$$f(xf(y))f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Bonne chance !

OSM Tour final 2007

deuxième examen - le 24 mars 2007

Durée : 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Trois cercles k_1, k_2, k_3 de rayon égal se coupent non-tangentiellement en un point P. Soient A et B les centres des cercles k_1 et k_2. Soit D resp. C le point d'intersection différent de P de k_3 avec k_1 resp. k_2. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

7. Soient a, b, c des nombres nonnégatifs et soit $m = \frac{a+b+c}{3}$ leur moyenne arithmétique. Montrer que

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{a+\sqrt{b}}} \leq 3\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}.$$

8. Soit $M \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2007\}$ un ensemble ayant la propriété suivante : parmi trois nombres appartenant à M, on peut toujors en choisir deux tels que l'un divise l'autre. Quelle est la taille maximale de l'ensemble M?

9. Trouves tous les couples (a, b) de nombres naturels tels que

$$\frac{a^3+1}{2ab^2+1}$$

est un nombre entier.

10. On subdivise le plan en triangles équilatéraux de longueur de côté 1 et on considère un triangle équilatéral de longueur de côté n dont les côtés sont sur la grille. On pose un caillou sur tous les sommets de la grille qui se trouvent sur le bord et à l'intérieur du triangle. A chaque coup du jeu on choisit un triangle d'unité dont exactement deux sommets sont recouverts par un caillou. On enlève alors les deux et on met un autre caillou sur le sommet qui était libre au début du coup. Pour quelles valeurs de n est-il possible d'arriver à un unique caillou restant en un nombre fini de coups ?

Bonne chance !