Sélection OIM 2007

Premier examen - le 5 mai 2007

Durée : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB \parallel CD$ et $AB > CD$. Les points K et L se trouvent sur le côté AB, respectivement CD tels que $AK/KB = DL/LC$. Les points P et Q se trouvent sur le segment KL tels que

$$\angle APB = \angle BCD \qquad \text{et} \qquad \angle CQD = \angle ABC.$$

Montrer que les points P, Q, B et C sont sur le même cercle.

2. Déterminer les deux plus petits nombres naturels que l'on peut écrire sous la forme $7m^2 - 11n^2$ avec m et n des nombres naturels.

3. On appelle deux personnes *un couple d'amis* si elles se connaissent entre elles et on les appelle *un couple d'inconnus* si elles ne se connaissent pas (se connaître ou ne pas se connaître ne peut être que mutuel). Soient m, n des nombres naturels. Trouver le plus petit nombre naturel k satisfaisant la propriété suivante : dans chaque groupe de k personnes il existe toujours $2m$ personnes formant m couples disjoints d'amis, ou il existe $2n$ personnes formant n couples disjoints d'inconnus.

Sélection OIM 2007

Deuxième examen - le 6 mai 2007

Durée : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Un couple (r, s) de nombres naturels est appelé *bon* s'il existe un polynôme P avec des coefficients entiers et des nombres entiers deux à deux distincts $a_1, \ldots, a_r$ et $b_1, \ldots, b_s$ tels que

$$P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_r) = 2 \qquad \text{et} \qquad P(b_1) = P(b_2) = \ldots = P(b_s) = 5.$$

(a) Montrer que pour tout bon couple (r, s) on a $r, s \leq 3$.

(b) Déterminer tous les bons couples.

5. Soient $n > 1$ et m des nombres naturels. Un parlement est composé de mn députés qui ont formé $2n$ commissions selon les règles suivantes :

(i) Chaque commission est composée de m députés.

(ii) Chaque député fait partie d'exactement deux commissions.

(iii) Deux commissions ont toujours au plus un membre commun.

Déterminer en fonction de n la plus grande valeur possible de m qui rend la construction possible.

6. Soient a, b, c des nombres réels positifs tels que $a + b + c \geq abc$. Montrer qu'au moins deux des trois inégalités suivantes sont justes :

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \qquad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \qquad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6.$$

Sélection OIM 2007

Troisième examen - le 19 mai 2007

Durée : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ une suite qui contient chaque nombre naturel de 1 à 2007 exactement une fois. On répète plusieurs fois de suite l'opération suivante : Si le premier terme de la suite est n, alors on inverse l'ordre des n premiers termes. Montrer que la suite commence par 1 après avoir effectué cette opération un nombre fini de fois.

8. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \qquad \text{et} \qquad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Les diagonales BD et CE se coupent en P. Montrer que la droite AP coupe le côté CD en deux parties égales.

9. Déterminer tous les nombres naturels n pour lesquels il existe exactement un entier a avec $0 < a < n!$ tel que

$$n! \mid a^n + 1.$$

Sélection OIM 2007

Quatrième examen - le 20 mai 2007

Durée : 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soient n un nombre naturel et f la fonction définie par

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor .$$

Montrer qu'il existe une infinité de nombres naturels m tels que $f(m) < f(m+1)$ et une infinité de m tels que $f(m) > f(m+1)$.

11. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $x, y > 0$ on ait

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}.$$

12. Dans le triangle ABC, soit J le centre du cercle exinscrit qui est tangent au côté BC en A_1 et aux prolongements des côtés AC et AB en B_1, respectivement C_1. La droite A_1B_1 coupe la droite AB perpendiculairement en D. Soit E la projection de C_1 sur la droite DJ. Déterminer la valeur des angles $\angle BEA_1$ et $\angle AEB_1$.