# IMO Selektion 2006 Lösungen

**1.** Im Dreieck $ABC$ sei $D$ der Mittelpunkt der Seite $BC$ und $E$ die Projektion von $C$ auf $AD$. Angenommen es gelte $\angle ACE = \angle ABC$. Zeige, dass das Dreieck $ABC$ gleichschenklig oder rechtwinklig ist.

**1. Lösung**

Wir zeigen, dass entweder $AB = AC$ oder $\angle CAB = 90°$ gilt. Es sei $F$ der Schnittpunkt von $AD$ mit der Rechtwinkligen zu $AC$ durch $C$. Nun gilt nach Voraussetzung

$$\angle AFC = 90° - \angle FAC = \angle ACE = \angle ABC.$$

Somit liegen die Punkte $A, B, F, C$ auf einem Kreis, dem Thaleskreis über $AF$. Damit der Durchmesser $AF$ die Sehne $BC$ halbiert, muss diese entweder rechtwinklig auf $AF$ stehen oder ebenfalls durch den Mittelpunkt des Thaleskreises gehen. Im ersten Fall fallen die Mittelsenkrechte von $BC$ und die Höhe durch $A$ zusammen und somit gilt $AB = AC$. Im zweiten Fall ist $BC$ ein Durchmesser des Kreises und somit $\angle BAC = 90°$.

**2. Lösung**

Sei $S$ die Spiegelung von $C$ an $E$. Nach Voraussetzung gilt

$$\angle ASC = \angle ACE = \angle ABC.$$

Somit liegen die Punkte $A, S, B, C$ auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt $O$ auf der Gerade $AD$ liegt ($AD$ ist die Mittelsenkrechte von $CS$). Den Beweis kann man nun mit demselben Argument wie in der ersten Lösung beenden.

**3. Lösung**

Wie üblich seien $\angle ABC = \beta$ und $\angle BCA = \gamma$. Wir betrachten zuerst den Fall $\beta \geq \gamma$. Die Spiegelung von $A$ an der Mittelsenkrechten von $BC$ sei $A'$ und $CA$ schneide $BA'$ in $S$. Aus der Voraussetzung folgt sofort $\angle ACA' = \angle DCE = \beta - \gamma$. Verschwindet dieser Winkel, gilt $\beta = \gamma$ und $\triangle ABC$ ist somit gleichschenklig. Andernfalls ist $CDE$ ein rechtwinkliges Dreieck und wir wollen zeigen, dass es ähnlich zu $\triangle CSA'$ ist. Daraus folgt der rechte Winkel bei $A'$ und somit auch bei $A$. Wegen $\angle SCA' = \angle DCE$ genügt es die folgende Gleichung beweisen.

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CS}{CA'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{CD}{CS} = \frac{CE}{CA'}$$

Sei $P$ die Projektion von $B$ auf $AD$. Weil $D$ der Seitenmittelpunkt ist, gilt $BP = CE$ und $\angle PBD = \angle ECD = \beta - \gamma$. Wegen Symmetrie gilt ausserdem $CA' = BA$. Es genügt somit zu zeigen

$$\frac{CD}{CS} = \frac{BP}{BA}.$$

Dies folgt tatsächlich aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke $CDS$ und $BPA$ ($\angle ABP = \angle DCS = \gamma$).

Der Beweis für den Fall $\beta < \gamma$ funktioniert völlig analog.

**4. Lösung**

Sei $\beta = \angle ACE = \angle ABC$ und sei $\varphi = \angle CAD$. Nach Definition von $E$ gilt $\varphi + \beta = 90°$. Sei $F$ die Projektion von $C$ auf $AB$, wegen $\beta < 90°$ liegen $A$ und $F$ auf derselben Seite von $B$. Wir betrachten den Fall, dass $F$ auf der Strecke $AB$ liegt (der Fall, wo $F$ auf der anderen Seite von $A$ liegt, geht völlig analog). Wegen $\angle BFC = 90°$ liegt $F$ auf dem Thaleskreis über der Strecke $BC$, und dieser hat den Mittelpunkt $D$. Also gilt $DF = DB$ und somit $\angle DFB = \beta$. Andererseits gilt $\angle CEA = \angle CFA = 90°$, also ist $ACEF$ ein Sehnenviereck und daher $\angle CFE = \varphi$. Insgesamt folgt

$$90° = \angle CFE + \angle EFD + \angle DFB = \varphi + \beta + \angle EFD = 90° + \angle EFD,$$

also $\angle EFD = 0°$ und $D, E, F$ sind kollinear. Dies ist nur dann der Fall, wenn $A = F$ oder $D = E$ gilt. Im ersten Fall ist $\alpha = 90°$ nach Definition von $F$, im zweiten Fall steht $AD$ senkrecht auf $BC$ und somit gilt $AB = AC$.

**2.** Sei $n \geq 5$ eine ganze Zahl. Bestimme die grösste ganze Zahl $k$, sodass ein Polygon mit $n$ Ecken und genau $k$ inneren $90°$-Winkeln existiert? (Das Polygon muss nicht konvex sein, der Rand darf sich aber nicht selbst überschneiden.)

**Lösung**

Wir werden zeigen, dass $k = 3$ gilt für $n = 5$ und $k = \lfloor 2n/3 \rfloor + 1$ für $n \geq 6$.

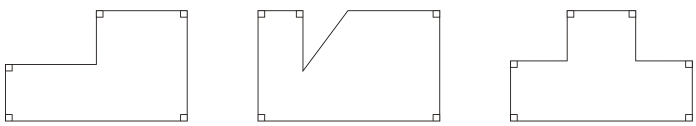
Ein $n$-Eck hat bekanntlich die Innenwinkelsumme $(n-2) \cdot 180°$. Nehmean, ein $n$-Eck besitzt genau $k$ innere rechte Winkel. Da alle anderen $n - k$ Innenwinkel kleiner als $360°$ sind, gilt somit

$$k \cdot 90° + (n-k) \cdot 360° > (n-2) \cdot 180°,$$

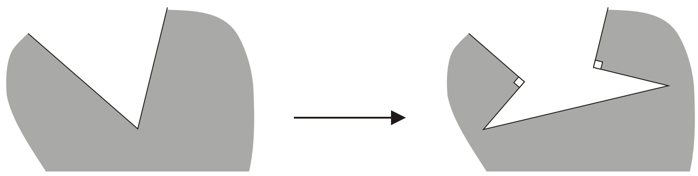
also $k < (2n+4)/3$. Da $n$ und $k$ ganz sind, gilt daher $k \leq \lfloor 2n/3 \rfloor + 1$.

Für $n = 5$ ist $\lfloor 2n/3 \rfloor + 1 = 4$. Besitzt ein Fünfeck aber vier rechte Innenwinkel, dann muss der fünfte Innenwinkel gleich $180°$ sein, was nicht erlaubt ist. Somit gilt $k \leq 3$ und man überlegt sich leicht, dass dies auch erreicht werden kann.

Wir konstruieren nun ein $n$-Eck mit genau $\lfloor 2n/3 \rfloor + 1$ inneren rechten Winkeln für alle $n \geq 6$. Die folgende Abbildung zeigt je ein Beispiel für die Fälle $n = 6, 7, 8$.



Für $n \geq 9$ konstruieren wir induktiv Beispiele. Da in unserer Konstruktion alle inneren, nicht rechten Winkel grösser als $180°$ sind, können wir ein 'Dreieck ohne Eckpunkt' um einen solchen Eckpunkt herum ausschneiden. Dieser Schritt produziert jedesmal drei neue Eckpunkte und zwei neue rechte Winkel (siehe Abbildung unten). Ausserdem



sind weiterhin alle Inneren Winkel, die nicht rechte sind, grösser als 180° Damit ist alles gezeigt.

**3.** Sei $n$ eine natürliche Zahl. Jede der Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist weiss oder schwarz gefärbt. Man kann nun wiederholt eine Zahl auswählen und diese, sowie alle zu ihr nicht teilerfremden Zahlen umfärben. Anfangs sind alle Zahlen weiss. Für welche $n$ kann man erreichen, dass irgendwann alle Zahlen schwarz sind?

### 1. Lösung

Dies ist immer möglich. Wir verwenden Induktion nach $n$, der Fall $n = 1$ ist klar. Nehme an, dies sei richtig für $n$ und betrachte die Zahlen $1, \ldots, n+1$. Durch umfärben von gewissen Zahlen können wir annehmen, dass die Zahlen $1, \ldots, n$ alle schwarz sind. Wir unterscheiden nun zwei Fälle für $n + 1$. Beachte dabei, dass zwei Zahlen, welche dieselben Primteiler haben, stets gleich gefärbt sind, unabhängig von den Exponenten in der Primfaktorzerlegung.

(i) Nehme an, $n+1$ sei durch ein Quadrat $> 1$ teilbar, also $n+1 = m^2 r$ mit $m > 1$. Da $n + 1$ dieselbe Farbe hat wie die Zahl $mr$ und da letztere kleiner als $n$ ist, muss $n + 1$ bereits schwarz sein, und wir sind fertig.

(ii) Nehme an, $n+1 = p_1 \cdots p_k$ sei ein Produkt von $k \geq 1$ verschiedenen Primzahlen. Wir behaupten nun, dass das Umfärben aller Teiler $a > 1$ von $n + 1$ den Effekt hat, dass $n + 1$ seine Farbe ändert, während alle Zahlen $1, \ldots, n$ ihre Farbe behalten. Sollte also $n + 1$ als einzige Zahl noch weiss sein, können wir das durch diese Umfärbung beheben und sind ebenfalls fertig.

Zum Beweis der Behauptung betrachten wir eine beliebige natürliche Zahl $x \leq n + 1$ und nehmen an, dass $x$ durch genau $l$ der Primzahlen $p_i$ teilbar ist. Die Anzahl Teiler $a = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}$ von $n + 1$, welche zu $x$ nicht teilerfremd sind, ist gleich $\binom{k}{j} - \binom{k-l}{j}$. Damit ändert $x$ seine Farbe genau

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} - \binom{k-l}{j} &= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} - 1\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-l} \binom{k-l}{j} - 1\right) \\ &= (2^k - 1) - (2^{k-l} - 1) = 2^k - 2^{k-l} \end{aligned}$$

mal. Für $x \leq n$ ist $l < k$ und $2^k - 2^{k-l}$ gerade, also behält $x$ seine Farbe. Jedoch gilt $l = k$ für $x = n+1$ und hier ist $2^k - 2^{k-l} = 2^k - 1$ ungerade, das heisst $n+1$ ändert seine Farbe, wie behauptet.

### 2. Lösung

Eine Menge $S$ natürlicher Zahlen heisse *vollständig*, falls für jede Zahl $x \in S$ auch alle Teiler $y > 1$ von $x$ in $S$ liegen. Wir werden allgemeiner zeigen, dass jede endliche, vollständige Menge $S$ umgefärbt werden kann, der Fall $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ergibt die Lösung der Aufgabe.

**Lemma 1.** *Sei $S$ eine endliche Menge natürlicher Zahlen. Es existiert eine Teilmenge $T \subset S$, sodass jedes Element von $S$ eine ungerade Anzahl Elemente von $T$ teilt.*

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach $n = |S|$, für $n = 1$ kann man $T = S$ wählen. Sei also $S$ gegeben und sei $x$ die kleinste Zahl in $S$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Teilmenge $T' \subset S \setminus \{x\}$, sodass jede Zahl $y \in S \setminus \{x\}$ eine ungerade Anzahl Elemente in $T'$ teilt. Gilt dies auch für $x$, dann können wir $T = T'$ setzen, sonst wählen wir $T = T' \cup \{x\}$. Letzteres, da wegen der Minimalität von $x$ kein anderes Element $y \in S$ ein Teiler von $x$ sein kann. $\square$

Der entscheidende Punkt ist nun folgendes Resultat.

**Lemma 2.** *Sei $S$ eine endliche, vollständige Menge und sei $T \subset S$ wie in Lemma 1. Dann ist jedes Element $x > 1$ aus $S$ zu einer ungeraden Anzahl Elementen von $T$ nicht teilerfremd.*

*Beweis.* Für $u \in S$ sei $m(u)$ die Menge der Elemente von $T$, die durch $u$ teilbar sind. Nach Konstruktion ist $|m(u)|$ ungerade für alle $u$. Sei $x \in S$ beliebig und grösser als 1. Wir werden nun wiederholt verwenden, dass $S$ alle Teiler $\neq 1$ von $x$ enthält. Seien $p_1, \dots, p_k$ die Primteiler von $x$ und sei $t \in T$. Genau dann ist $x$ nicht teilerfremd zu $t$, wenn $t$ durch einen der Primfaktoren $p_i$ teilbar ist. Die Anzahl Elemente von $T$, die nicht teilerfremd zu $x$ sind, ist demnach gleich $|m(p_1) \cup m(p_2) \cup \dots \cup m(p_k)|$. Nach der Ein-/Ausschaltformel gilt (mod 2)

$$\begin{aligned}
|m(p_1) \cup \dots \cup m(p_k)| &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_j} |m(p_{i_1}) \cap \dots \cap m(p_{i_j})| \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_j} |m(p_{i_1} \cdots p_{i_j})| \\
&\equiv \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = 1.
\end{aligned}$$

Folglich ist $x$ zu einer ungeraden Anzahl Elementen von $T$ nicht teilerfremd, wie behauptet. $\square$

Sei nun $S$ vollständig. Falls $1 \in S$, können wir 1 umfärben und danach annehmen, dass $1 \notin S$. Färbt man nun alle Elemente der oben konstruierten Menge $T$ um, ändert sich die Farbe aller Elemente in $S$, dies war zu zeigen.

## 3. Lösung

Wir werden zeigen, dass man jede vollständige Menge umfärben kann, falls die Elemente dieser Menge nur endlich viele verschiedene Primfaktoren haben.

**Lemma 3.** *Sei $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ eine endliche Menge verschiedener Primzahlen, und sei $S$ eine vollständige Menge von Zahlen, die nur Primteiler aus $P$ besitzen. Es existiert eine endliche Teilmenge $T(S) \subset S$, sodass das Umfärben der Zahlen in $T(S)$ die Farbe aller Elemente in $S$ umkehrt.*

*Beweis.* Wir verwenden Induktion nach $m$. Für $m = 1$ können wir $T(S) = \{p_1\}$ respektive $= \{1, p_1\}$ wählen. Wir nehmen im Folgenden $m > 1$ an. Wir setzen

$$\begin{aligned} U &= \{x \in S \mid p_m \nmid x\}, \\ V &= \{x \mid p_m \nmid x,\ p_m x \in S\}. \end{aligned}$$

Da $S$ vollständig ist, gilt dies auch für $U$ und $V$ und es ist offenbar $V \subset U \subset S$. Ausserdem gibt es nach Induktionsvoraussetzung endliche Mengen $T(U) \subset U$ und $T(V) \subset V$, sodass das Umfärben der Elemente in diesen Mengen die Farbe aller Zahlen in $U$ respektive $V$ ändert. Nach Konstruktion gilt auch $p_m V = \{p_m v \mid v \in V\} \subset S$. Wir färben nun alle Elemente von $T(U), T(V)$ und $p_m T(V)$ um, Elemente, die in mehreren dieser Mengen liegen, werden dabei auch mehrfach umgefärbt. Sei $x \in S$ beliebig, wir untersuchen die Farbe von $x$ nach dieser Umfärbung.

- *$x$ ist kein Vielfaches von $p_m$.* Umfärben der Zahlen in $T(U)$ ändert die Farbe von $x$. Falls das Umfärben eines $v \in T(V)$ die Farbe von $x$ ändert, dann ändert sie das Umfärben von $p_m v$ wieder zurück. Folglich ändert sich insgesamt die Farbe von $x$.
- *$x$ ist eine Potenz von $p_m$.* Umfärben der Zahlen in $T(U)$ und $T(V)$ hat keinen Einfluss auf $x$. Aber jede der $|T(V)|$ Zahlen in $p_m T(V)$ ändert die Farbe von $x$.
- *$x$ ist durch $p_m$ teilbar, ist aber keine Potenz von $p_n$.* Sei $x = p_m^r y$ mit $y \neq 1$. Wegen $y \in V$, $y \in U$ ändert sich die Farbe von $x$ sowohl beim Umfärben der Zahlen in $T(U)$, als auch beim Umfärben der Zahlen in $T(V)$. Schliesslich ändert jede der $|T(V)|$ Zahlen in $p_m T(V)$ die Farbe von $x$.

Nach der Umfärbung haben also alle Vielfachen von $p_m$ dieselbe Farbe (nämlich dieselbe wie zu Beginn resp. die andere, je nachdem ob $|T(V)|$ gerade oder ungerade ist). Alle anderen Zahlen in $S$ haben ihre Farbe geändert. Durch eventuelles Umfärben von $p_m$ können wir somit erreichen, dass alle Zahlen in $S$ ihre Farbe ändern. Das bedeutet, wir können für $T(S)$ alle Zahlen wählen, die in genau einer der Mengen $T(U)$ und $T(V)$ sind, sowie alle Zahlen in $p_m T(V)$ ausser eventuell $p_m$. Damit ist alles gezeigt. $\square$

**4.** Die positiven Teiler der natürlichen Zahl $n$ seien $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Bestimme alle $n$, für die gilt

$$2n = d_5^2 + d_6^2 - 1.$$

**Lösung**

Für jedes $1 \leq i \leq k$ ist $n/d_i$ ebenfalls ein positiver Teiler von $n$ und ein einfaches Abzählargument zeigt, dass dieser gleich $d_{k+1-i}$ sein muss. Folglich gilt $n = d_i d_{k+1-i}$ für alle $i$. Aus der gegebenen Gleichung folgen die beiden Abschätzungen

$$2n = d_5^2 + d_6^2 - 1 < 2d_6^2,$$

$$2n = d_5^2 + d_6^2 - 1 \geq d_5^2 + (d_5 + 1)^2 - 1 = 2d_5^2 + 2d_5 > 2d_5^2.$$

Dies ergibt $d_5^2 < n < d_6^2$, nach obiger Bemerkung muss also $n = d_5 d_6$ gelten, insbesondere ist $k = 10$. Setzt man dies in die Gleichung ein und formt um, dann folgt $1 = (d_6 - d_5)^2$, also $d_6 = d_5 + 1$.

Eine natürliche Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ besitzt genau $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ verschiedene positive Teiler. Da $n$ genau $10 = 2 \cdot 5$ positive Teiler besitzt, muss die Primfaktorzerlegung von $n$ von der Form $n = p^9$ oder $n = p^4 q$ mit verschiedenen Primzahlen $p, q$ sein. Wir benützen nun, dass $d_6 = d_5 + 1$ gilt. Daraus folgt erstens, dass $d_5$ und $d_6$ teilerfremd sind, also ist $n$ von der Form $n = p^4 q$. Zweitens ist genau einer dieser Teiler gerade, daher ist $q = 2$ oder $p = 2$. Im ersten Fall folgt wegen der Teilerfremdheit, dass $d_5 = 2$ oder $d_6 = 2$ gilt. Beides ist aber offenbar nicht möglich, da sicher $d_2 = 2$. Im zweiten Fall folgt analog $d_5 = q$ oder $d_6 = q$. Wegen $q \geq 3$ zeigt eine kurze Inspektion der kleinen Teiler, dass dann $d_6 = 2^4$ bzw. $d_5 = 2^4$ sein muss. Nur die zweite Alternative führt zur Primzahl $d_6 = 17$ und zu $n = 2^4 \cdot 17 = 272$. Man rechnet leicht nach, dass dies in der Tat eine Lösung des Problems ist.

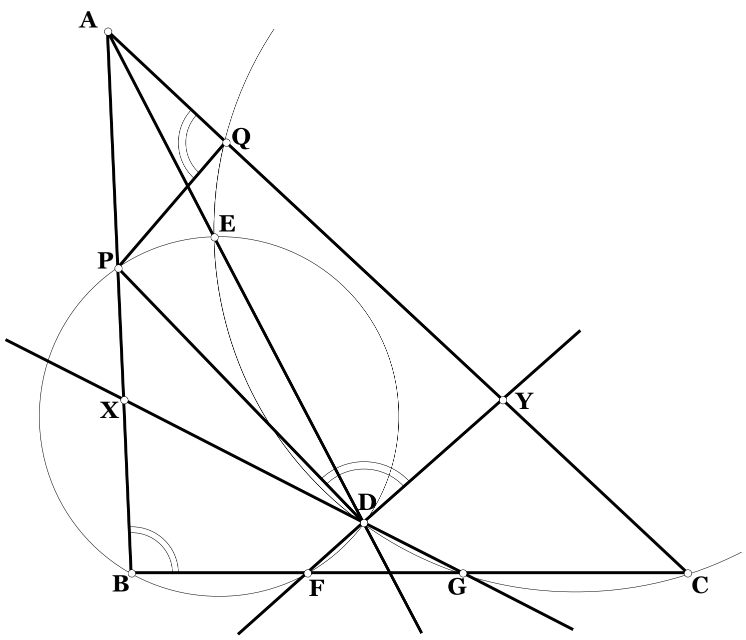
**5.** Sei $ABC$ ein Dreieck und $D$ ein Punkt in dessen Inneren. Sei $E$ ein von $D$ verschiedener Punkt auf der Geraden $AD$. Seien $\omega_1$ und $\omega_2$ die Umkreise der Dreiecke $BDE$ bzw. $CDE$. $\omega_1$ und $\omega_2$ schneiden die Seite $BC$ in den inneren Punkten $F$ bzw. $G$. Der Schnittpunkt von $DG$ und $AB$ sei $X$ und der Schnittpunkt von $DF$ und $AC$ sei $Y$. Zeige, dass $XY$ parallel zu $BC$ ist.

### 1. Lösung

Die Schnittpunkte von $\omega_1$ und $\omega_2$ mit den Seiten $AB$ bzw. $AC$ seien $P$ bzw. $Q$. Weil $A$ auf der Potenzlinie der beiden Kreise liegt, gilt

$$AP \cdot AB = AE \cdot AD = AQ \cdot AC.$$

Somit ist $BCQP$ ein Sehnenviereck und es gilt $\angle ABC = \angle AQP$. Um zu zeigen, dass $XY$ parallel zu $BC$ ist, genügt es also zu zeigen, dass $\angle AXY = \angle AQP$ gilt, d.h. dass die Punkte $P, Q, X, Y$ auf einem Kreis liegen.
Weil $BFDP$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\angle PDY = \angle PBF = \angle ABC$ und somit $\angle AQP = \angle PDY$. Dies bedeutet, dass $P, Q, Y, D$ auf einem Kreis liegen. Analog zeigen wir, dass $P, Q, X, D$ auf einem Kreis liegen. Insbesondere liegen die Punkte $P, Q, X, Y$ alle auf dem Umkreis von $\triangle PQD$.



**2. Lösung**

Wir verwenden im folgenden gerichtete Streckenverhältnisse. Nach Strahlensatz genügt es zu zeigen, dass
$$\frac{FY}{YD} = \frac{GX}{XD}.$$
Sei $S$ der Schnittpunkt von $AD$ und $BC$. Nach Menelaos im Dreieck $FDS$ mit den kollinearen Punkten $Y, A, C$ gilt
$$\frac{FY}{YD} \cdot \frac{DA}{AS} \cdot \frac{SC}{CF} = -1.$$
Analog liefert Menelaos in $\triangle GDS$ mit den Punkten $X, A, B$
$$\frac{GX}{XD} \cdot \frac{DA}{AS} \cdot \frac{SB}{BG} = -1.$$
Nach dem Vergleich der beiden Gleichungen bleibt zu zeigen
$$\frac{SC}{CF} = \frac{SB}{BG} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{CF}{SC} = 1 - \frac{BG}{SB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{SF}{SC} = \frac{SG}{SB} \quad \Leftrightarrow \quad SF \cdot SB = SG \cdot SC$$
Die letzte Gleichung stimmt, weil $S$ nach Konstruktion auf der Potenzlinie der beiden Kreise liegt.

**6.** Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung gilt
$$f(f(x) - y^2) = f(x)^2 - 2f(x)y^2 + f(f(y)).$$

**Lösung**

Offenbar ist $f = 0$ eine Lösung der Gleichung. Wir nehmen im Folgenden daher an, dass $f$ nicht identisch verschwindet und zeigen, dass $f(z) = z^2$ gilt für alle $z \in \mathbb{R}$. Dass dies wirklich eine Lösung der Gleichung ist, rechnet man leicht nach. Mit $x = y = 0$ folgt nun $f(f(0)) = f(0)^2 + f(f(0))$, also $f(0) = 0$. Setze $y = 0$, dann folgt damit
$$f(f(x)) = f(x)^2. \tag{1}$$
Setzt man dies in die ursprüngliche Gleichung ein, erhält man
$$f(f(x) - y^2) = f(x)^2 - 2f(x)y^2 + f(y)^2 \tag{2}$$
Ersetzt man hier $y$ durch $f(y)$ und verwendet wieder (1), dann folgt
$$f(f(x) - f(y)^2) = (f(x) - f(y)^2)^2.$$
Mit anderen Worten, es gilt
$$f(z) = z^2 \qquad \text{für alle } z \in S = \{f(u) - f(v)^2 \mid u, v \in \mathbb{R}\}. \tag{3}$$
Wir zeigen zuerst, dass jede nichtpositive reelle Zahl in $S$ liegt. Dazu wählen eine reelle Zahl $a$ mit $f(a) \neq 0$. Indem wir $a$ gegebenenfalls durch $f(a)$ ersetzen, können wir wegen (1) sogar $f(a) > 0$ annehmen. Aus (2) folgt mit $x = a$ nun
$$f(f(a) - y^2) - f(y)^2 = f(a)(f(a) - 2y^2).$$
Die rechte Seite nimmt wegen $f(a) > 0$ nun alle nichtpositiven reellen Werte an, also auch die linke. Dies beweist $\mathbb{R}_{\leq 0} \subset R$ und somit gilt $f(z) = z^2$ für alle $z \leq 0$ nach (3). Dies wiederum impliziert aber, dass alle nichtnegativen reellen Zahlen als Werte von $f$ vorkommen. Wegen $f(0) = 0$ ergibt dies nun auch $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset S$, somit also auch $f(z) = z^2$ für alle $z \in \mathbb{R}$, wie behauptet.

**7.** Das Polynom $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ besitze die drei reellen Nullstellen $a > b > c$. Finde den Wert des Ausdrucks

$$a^2b + b^2c + c^2a.$$

**Lösung**

Wir setzen $A = a^2b + b^2c + c^2a$ und $B = a^2c + c^2b + b^2a$. Wegen $a > b > c$ gilt

$$A - B = (a-c)(c-b)(b-a) > 0,$$

also ist $A$ grösser als $B$. Wir verwenden im Folgenden die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} u &= a+b+c, \\ v &= ab+bc+ca, \\ w &= abc, \end{aligned}$$

nach dem Satz von Vieta gilt $u = 2$, $v = -1$, $w = -1$. Nun gilt

$$\begin{aligned} A + B &= a(ab+ac) + b(bc+ba) + c(cb+ca) \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc = uv - 3w = 1. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Identität $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ folgt weiter

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a^3+b^3+c^3-3abc)abc + (a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-3a^2b^2c^2) + 9a^2b^2c^2 \\ &= u(u^2-3v)w + v(v^2-3uw) + 9w^2 = -12. \end{aligned}$$

Wiederum nach Vieta sind $A$ und $B$ daher die beiden Nullstellen des Polynoms $Q(x) = x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$. Wegen $A > B$ ergibt dies den gesuchten Wert $A = 4$.

**8.** Längs eines Kreises stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 2006$ in beliebiger Reihenfolge. Es können nun wiederholt zwei auf dem Kreis benachbarte Zahlen miteinander vertauscht werden. Nach einer Folge solcher Vertauschungen steht jede der Zahlen diametral gegenüber ihrer Anfangsposition. Beweise, dass mindestens einmal zwei Zahlen mit Summe 2007 vertauscht wurden.

**Lösung**

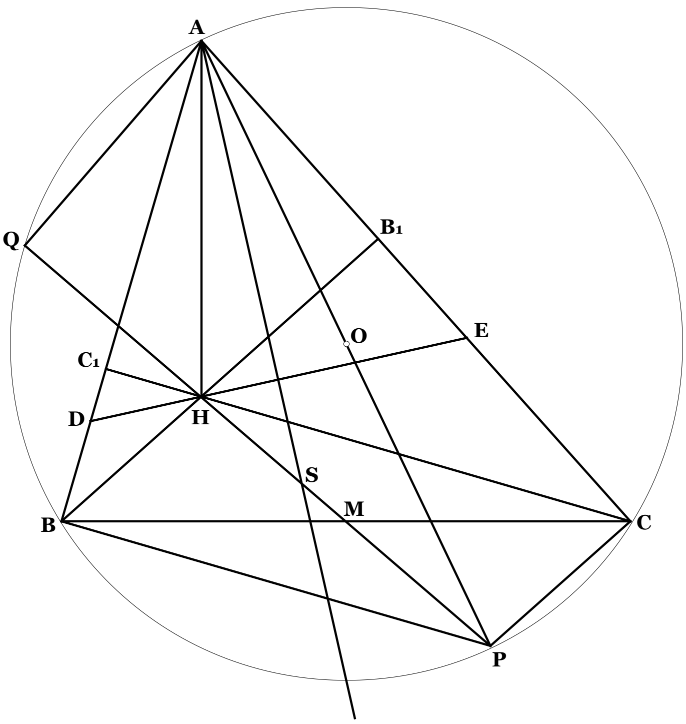
Für $1 \leq k \leq 2006$ sei $a_k$ wie folgt definiert: Am Anfang ist $a_k = 0$ und jedes Mal, wenn die Zahl $k$ eine Position im (gegen den) Uhrzeigersinn wandert, erhöht (erniedrigt) sich $a_k$ um 1. Die Grösse $a_1 + \ldots + a_{2006}$ ist am Anfang gleich 0 und ändert sich bei einer Vertauschung nicht, verschwindet also immer. Wenn die Zahl $k$ auf die gegenüberliegende Position gewandert ist, muss gelten $a_k = 1003 + n \cdot 2006$ mit einer ganzen Zahl $n$, insbesondere ist $a_k$ ungerade. Wenn nun nie zwei Zahlen mit Summe 2007 vertauscht werden, dann gilt $a_k = a_{2007-k}$ alle $k$. Zum Beweis nehmen wir an, es sei $a_k = a_{2007-k} + n \cdot 2006$ mit $n \geq 1$. Sei $0 < m < 2006$ der Abstand der Zahl $k$ zu der Zahl $2007 - k$ im Uhrzeigersinn gemessen vor der ersten Vertauschung. Die Differenz $a_k - a_{2007-k}$ ist anfangs gleich 0, am Schluss mindestens 2006, und ändert sich in jedem Schritt um höchstens 1, wenn wir annehmen, dass $k$ und $2007 - k$ nie vertauscht werden. Dann muss diese Differenz aber irgendwann gleich $m$ sein, was bedeutet dass $k$ und $2007 - k$ auf derselben Position stehen, dies ist ein Widerspruch. Daraus folgt nun $0 = a_1 + \ldots + a_{2006} = 2(a_1 + \ldots + a_{1003})$, also verschwindet die letzte Klammer. Das ist aber nicht möglich, da die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen nie 0 sein kann, Widerspruch.

**9.** Sei $ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq AC$ und Höhenschnittpunkt $H$. Der Mittelpunkt der Seite $BC$ sei $M$. Die Punkte $D$ auf $AB$ und $E$ auf $AC$ seien so, dass $AE = AD$ ist und $D, H, E$ auf einer Geraden liegen. Zeige, dass $HM$ und die gemeinsame Sehne der Umkreise der beiden Dreiecke $ABC$ und $ADE$ rechtwinklig zueinander liegen.

### Lösung

Sei $k$ der Umkreis von $\triangle ABC$ und sei $O$ Mittelpunkt von $k$. Der zweite Schnittpunkt von $AO$ mit $k$ sei $P$. Wir zeigen als erstes, dass die Punkte $H, M, P$ auf einer Geraden liegen. Die Höhenfusspunkte der Höhen von $\triangle ABC$ durch $B$ bzw. $C$ seien $B_1$ bzw. $C_1$. Da $AP$ ein Durchmesser von $k$ ist, gilt $\angle ABP = 90° = \angle AC_1C$ und ebenfalls $\angle ACP = 90° = \angle AB_1B$. Damit ist $BPCH$ ein Parallelogramm und $HM$ schneidet $k$ in $P$.

Sei $Q$ der zweite Schnittpunkt von $PH$ mit $k$. Es genügt zu zeigen, dass $Q$ auf dem Umkreis von $\triangle ADE$ liegt. Sei $S$ der Schnittpunkt von $PH$ mit der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$. Offenbar liegt $Q$ auf dem Thaleskreis über $AS$. Wir zeigen nun, dass auch $D$ auf diesem Thaleskreis liegt.




Sei $\angle BAC = \alpha$. Einfache Winkeljagd zeigt $\angle BHC_1 = \alpha$ und $\angle DHC_1 = 90° - \angle EDA = \alpha/2$, d.h. $HD$ ist die Winkelhalbierende von $\angle BHC_1$ und es gilt somit

$$\frac{C_1D}{DB} = \frac{HC_1}{HB}.$$

Sei $\angle ABC = \beta$. Es gilt nun $\angle BAH = \angle CAP = 90° - \beta$. Damit ist $AS$ auch Winkelhalbierende von $\angle HAP$ und somit

$$\frac{HS}{SP} = \frac{AH}{AP} = \frac{HC_1}{CP}.$$

Die zweite Gleichung gilt, weil $\triangle AHC_1 \sim \triangle APC$. Weil $BPCH$ ein Parallelogramm ist, können wir mit $CP = HB$ zusammenfassend schliessen

$$\frac{C_1D}{DB} = \frac{HS}{SP}.$$

Daraus folgt $DS \parallel C_1C$ und somit $\angle ADS = 90°$, was bedeutet, dass die Punkte $A, Q, D, S$ auf einem Kreis liegen. Analog zeigt man, dass auch $E$ auf diesem Kreis liegt. Damit ist gezeigt, dass $Q$ auf dem Umkreis von $\triangle ADE$ liegt und weil $AP$ ein Durchmesser von $k$, gilt $\angle PQA = 90°$.

**10.** Seien $a, b, c$ positive reelle Zahlen mit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Beweise die Ungleichung

$$\sqrt{ab+c} + \sqrt{bc+a} + \sqrt{ca+b} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

**1. Lösung**

Die Nebenbedingung ist äquivalent zu $abc = ab + bc + ca$. Mit C.S. folgt

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab+c} &= \sqrt{\frac{abc + c^2}{c}} = \sqrt{\frac{ab + bc + ca + c^2}{c}} = \frac{\sqrt{(a+c)(b+c)}}{\sqrt{c}} \\
&\geq \frac{\sqrt{ab} + c}{\sqrt{c}} = \frac{1}{c}\sqrt{abc} + \sqrt{c}.
\end{aligned}$$

Addiert man diese und die beiden analogen Ungleichungen und verwendet nochmals die Nebenbedingung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, dann folgt das Gewünschte.

**2. Lösung**

Setze $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ und $z = \frac{1}{c}$, dann gilt $x + y + z = 1$ und nach Multiplikation mit $\sqrt{xyz}$ lautet die Ungleichung

$$\sqrt{xy+z} + \sqrt{yz+x} + \sqrt{zx+y} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}.$$

Wegen $x + y + z = 1$ genügt es also zu zeigen, dass $\sqrt{xy+z} \geq \sqrt{xy} + z$ gilt, denn addiert man diese Abschätzung zusammen mit den beiden analogen, dann folgt die Behauptung. Dies folgt aber einfach aus C.S.

$$\sqrt{xy+z} = \sqrt{xy + z(x+y+z)} = \sqrt{(x+z)(y+z)} \geq \sqrt{xy} + z.$$

**3. Lösung**

Es gilt

$$\sqrt{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\sqrt{abc} = \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}.$$

Folglich genügt es zu zeigen, dass $\sqrt{ab+c} \geq \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{c}$ gilt. Quadrieren und Vereinfachen liefert die äquivalente Ungleichung

$$ab \geq \frac{ab}{c} + 2\sqrt{ab}.$$

Verwendet man nun $\frac{1}{c} = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ und vereinfacht, dann bleibt $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ zu zeigen, dies folgt aber direkt aus AM-GM.

**4. Lösung**

Die Nebenbedingung ist äquivalent zu $abc = ab + bc + ca$. Nach Quadrieren lautet die linke Seite der Ungleichung

$$a+b+c+ab+bc+ca+2\sqrt{ab+c}\sqrt{bc+a}+2\sqrt{bc+a}\sqrt{ca+b}+2\sqrt{ca+b}\sqrt{ab+c}.$$

Die rechte Seite hingegen ist gleich

$$a+b+c+abc+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}+2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}+2c\sqrt{ab}.$$

Verwendet man hier $abc = ab + bc + ca$, dann erhält man die äquivalente Form

$$\begin{aligned}\sqrt{ab+c}\sqrt{bc+a}+\sqrt{bc+a}\sqrt{ca+b}+\sqrt{ca+b}\sqrt{ab+c}& \\ \geq (1+a)\sqrt{bc}+(1+b)\sqrt{ca}+(1+c)\sqrt{ab}.&\end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $\sqrt{ab+c}\sqrt{bc+a} \geq (1+b)\sqrt{ca}$, denn addiert man diese und die beiden analogen Ungleichungen, ergibt sich das Gewünschte. Zum Beweis kann man C.S. verwenden:

$$\sqrt{ab+c}\sqrt{bc+a} \geq \sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a} = (b+1)\sqrt{ac}.$$

Alternativ kann man die Ungleichung auch Quadrieren, es bleibt dann noch $a^2 + c^2 \geq 2ac$ zu zeigen, dies ist aber AM-GM.

**11.** Finde alle natürlichen Zahlen $k$, sodass $3^k + 5^k$ eine Potenz einer natürlichen Zahl mit Exponent $\geq 2$ ist.

**1. Lösung**

Nehme an, es sei $3^k + 5^k = n^t$ mit $t \geq 2$. Ist $k$ gerade, dann gilt $3^k + 5^k \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 4$, also ist die linke Seite gerade aber nicht durch 4 teilbar, ein Widerspruch zu $t \geq 2$. Ist $k$ ungerade, dann gilt

$$3^k + 5^k = (3+5)(3^{k-1} - 3^{k-2}\cdot 5 + \ldots - 3\cdot 5^{k-2} + 5^{k-1}).$$

Der zweite Faktor rechts ist ungerade, denn er besteht aus einer ungeraden Anzahl Summanden, welche alle ungerade sind. Folglich ist $3^k + 5^k$ durch 8 aber nicht durch 16 teilbar, also gilt $t = 3$:

$$3^k + 5^k = n^3.$$

Offenbar ist $k = 1$ eine Lösung, wir zeigen, dass es die einzige ist. Für $k \geq 2$ betrachten wir die Gleichung modulo 9. Da $k$ ungerade ist, ergibt eine kurze Rechnung

$$3^k + 5^k \equiv 5^k \equiv \begin{cases} 5, & k \equiv 1 \pmod 6 \\ 8, & k \equiv 3 \pmod 6 \\ 2, & k \equiv 5 \pmod 6 \end{cases} \pmod 9.$$

Für die rechte Seite gilt jedoch $n^3 \equiv 0, 1, 8 \pmod 9$. Folglich muss $k \equiv 3 \pmod 6$ gelten. Wir betrachten die Gleichung nun modulo 7. Da $k$ ungerade ist, zeigt eine kurze Rechnung

$$3^k + 5^k \equiv \begin{cases} 1, & k \equiv 1, 5 \pmod 6 \\ 5, & k \equiv 3 \pmod 6 \end{cases} \pmod 7.$$

Für die rechte Seite gilt aber $n^3 \equiv 0, 1, 6 \pmod 7$. Daher muss $k \equiv 1, 5 \pmod 6$ gelten, im Widerspruch zu $k \equiv 3 \pmod 6$.

**2. Lösung**

Man kann den Beweis auch wie folgt beenden: Die Rechnung modulo 9 zeigt, dass $k$ durch 3 teilbar ist, $k = 3l$. Damit folgt nun die Gleichung

$$(3^l)^3 + (5^l)^3 = n^3,$$

welche nach dem Satz von Fermat aber keine Lösung besitzt, Widerspruch.

**12.** Eine Raumstation besteht aus 25 Kammern, und je zwei Kammern sind mit einem Tunnel verbunden. Es gibt insgesamt 50 Haupttunnel, die in beide Richtungen benutzt werden können, die restlichen sind alle Einbahntunnel. Eine Gruppe von vier Kammern heisst *verbunden*, falls man von jeder dieser Kammern in jede andere gelangen kann, indem man nur die sechs Tunnel verwendet, welche diese Kammern untereinander verbinden. Bestimme die grösstmögliche Anzahl verbundener Vierergruppen.

**Lösung**

Gibt es in einer Vierergruppe eine Kammer, von der drei Einwegtunnel wegführen, so ist diese Gruppe sicher nicht verbunden. Wir nennen eine solche Kammer *isoliert* in der Gruppe. Nummeriere die Kammern und nehme an, von der $k$-ten Kammer führen $a_k$ Einwegtunnel weg. Insgesamt gibt es $\binom{25}{2} - 50 = 250$ Einwegtunnel. Es gilt daher $a_1 + \ldots + a_{25} = 250$, denn jeder Einwegtunnel führt aus genau einer Kammer heraus. Die $k$-te Kammer ist in genau $\binom{a_k}{3}$ Vierergruppen isoliert, es gibt also mindestens

$$X = \binom{a_1}{3} + \binom{a_2}{3} + \ldots + \binom{a_{25}}{3}$$

nicht verbundene Vierergruppen. Wir behaupten nun, dass $X$ den kleinstmöglichen Wert annimmt, wenn alle $a_k$ gleich gross sind. Gilt nämlich $r - 2 \geq s \geq 0$, dann zeigt eine kurze Rechnung

$$\binom{r}{3} + \binom{s}{3} > \binom{r-1}{3} + \binom{s+1}{3} \iff (r-1)(r-2) > s(s-1),$$

und letzteres stimmt nach Annahme. Wenn $X$ also sein Minimum annimmt, dann dürfen sich je zwei der $a_k$ um höchstens 1 unterscheiden. Da deren Summe 250 aber durch 25 teilbar ist, müssen sogar alle gleich gross sein, wie behauptet. Es gilt also $X \geq 25 \cdot \binom{10}{3} = 3000$. Folglich gibt es höchstens $\binom{25}{4} - 3000 = 9650$ verbundene Vierergruppen.

Wir zeigen nun, dass dieser Wert auch erreicht werden kann. Dazu konstruieren wir eine Anordnung der Tunnels wie folgt: Ordne die Kammern auf einem Kreis an, und nummeriere sie $K_1, \ldots, K_{25}$ im Uhrzeigersinn. Im Folgenden sind alle Indizes modulo 25 zu betrachten. Von der Kammer $K_n$ führen Einwegtunnel zu den Kammern $K_{n+1}, \ldots, K_{n+10}$, die Kammern $K_{n+11}, \ldots, K_{n+14}$ sind durch einen Haupttunnel mit $K_n$ verbunden, und schliesslich führen Einwegtunnel von den Kammern $K_{n+15}, \ldots K_{n+24}$ nach $K_n$. Man überlegt sich leicht, dass dies eine wohldefinierte Konfiguration ergibt.

Nach Konstruktion und dem schon Gezeigten enthält diese Konfiguration genau 3000 Vierergruppen mit einer isolierten Kammer. Es genügt also zu zeigen, dass alle Vierergruppen ohne isolierte Kammer verbunden sind. Nehme oBdA an, $\{K_1, K_r, K_s, K_t\}$ mit $1 < r < s < t \leq 25$ sei eine Vierergruppe ohne isolierte Kammer. Wir behaupten, dass die Abstände $r-1$, $s-r$, $t-s$ und $26-t$ (also die Abstände aufeinanderfolgender Kammern im Uhrzeigersinn) alle kleiner als 15 sind. Haben nämlich zwei aufeinanderfolgende Kammern einen grösseren Abstand, dann ist die zweite der beiden nach Konstruktion isoliert. Wieder nach Konstruktion kann man also die Kammern in der Reihenfolge $K_1 \to K_r \to K_s \to K_t \to K_1$ durchwandern, die Vierergruppe ist also in der Tat verbunden. Damit ist alles gezeigt.