OSM - Tour préliminaire

Lausanne, Zurich - le 14 janvier 2006

Durée: 3 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que les trois différences

$$|p-q|, \quad |q-r|, \quad |r-p|$$

soient également toutes des nombres premiers.

2. Soit n un nombre naturel. Déterminer le nombre de sous-ensembles $A \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tels qu'il n'existe pas deux éléments $x, y \in A$ avec $x + y = 2n + 1$.

3. Dans le triangle ABC soit D l'intersection de BC avec la bissectrice de $\sphericalangle BAC$. Le centre du cercle circonscrit du triangle $\triangle ABC$ coïncide avec le centre du cercle inscrit de $\triangle ADC$. Trouver tous les angles de $\triangle ABC$.

4. Déterminer toutes les solutions positives entières de l'équation

$$\text{ppcm}(a, b, c) = a + b + c.$$

5. Considérons un tableau de jeu $m \times n$ décomposé en carrés unitaires. Un L-triomino est composé de trois carrés unitaires, dont un carré central et deux carrés extérieurs. Dans le coin en haut à gauche se trouve un L-triomino tel que le carré central couvre la case du coin. Un coup du jeu consiste à faire une rotation d'un multiple de $90°$ du L-triomino autour du centre d'un de ses carrés extérieurs. Pour quels m et n est-il possible d'amener le L-triomino dans le coin en bas à droite en un nombre fini de coups?

Bonne chance!