Sélection OIM 2006

Premier examen - le 29 avril 2006

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Dans le triangle ABC soit D le milieu du côté BC et E la projection de C sur AD. On suppose que $\angle ACE = \angle ABC$. Montrer que le triangle ABC est soit isocèle, soit rectangle.

2. Soit $n \geq 5$ un nombre entier. Déterminer le plus grand entier k tel qu'il existe un n-gone avec exactement k angles intérieurs de $90°$. (Le n-gone n'a pas besoin d'être convexe.)

3. Soit n un nombre naturel. Chacun des nombres $\{1, 2, \ldots, n\}$ est coloré soit en blanc, soit en noir. On choisit un nombre et on change sa couleur, tout comme la couleur des nombres avec lesquels il a un diviseur commun. Au départ tous les nombres sont blancs. Pour quels n peut-on arriver à une configuration où tous les nombres sont noirs en un nombre fini de changements?

Sélection OIM 2006

Deuxième examen - le 30 avril 2006

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soient $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ les diviseurs positifs de n. Déterminer tous les n tels que
$$2n = d_5^2 + d_6^2 - 1.$$

5. Soit ABC un triangle et D un point à l'intérieur. Soit E un point sur la droite AD différent de D. Soient ω_1 et ω_2 les cercles circonscrits des triangles BDE resp. CDE. ω_1 et ω_2 coupent le côté BC en les points intérieurs F resp. G. Soit X le point d'intersection de DG avec AB et Y le point d'intersection de DF avec AC. Montrer que XY est parallèle à BC.

6. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on ait l'égalité suivante
$$f(f(x) - y^2) = f(x)^2 - 2f(x)y^2 + f(f(y)).$$

Sélection OIM 2006

Troisième examen - le 13 mai 2006

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

7. Les trois zéros réels du polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ sont $a > b > c$. Trouver la valeur de l'expression

$$a^2b + b^2c + c^2a.$$

8. On aligne les nombres $1, 2, \dots, 2006$ le long d'un cercle dans un ordre quelconque. Un coup consiste à échanger deux nombres voisins. Après un nombre fini de coups tous les nombres se trouvent diamétralement opposés à leur position de départ. Montrer qu'au moins une fois on a échangé deux nombres dont la somme valait 2007.

9. Soit ABC un triangle aigu avec $AB \neq AC$ et l'orthocentre H. Soit M le milieu du côté BC. Soient D sur AB et E sur AC deux points tels que $AE = AD$ et D, H, E se trouvent sur la même droite. Montrer que HM et l'arc commun des cercles circonscrits des triangles ABC et ADE sont orthogonaux.

Sélection OIM 2006

Quatrième examen - le 14 mai 2006

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soient a, b, c des nombres réels positifs avec $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$. Démontrer l'inégalité suivante:

$$\sqrt{ab+c} + \sqrt{bc+a} + \sqrt{ca+b} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

11. Trouver tous les nombres naturels k tels que $3^k + 5^k$ est la puissance d'un nombre naturel d'exposant ≥ 2.

12. Un aéoroport contient 25 terminaux qui sont deux à deux reliés par des tunnels. Il y a exactement 50 tunnels principaux qui peuvent être parcourus dans les deux sens, les autres sont à sens unique. Un groupe de quatre terminaux est appelé *connexe* si de chacun d'entre eux on peut accéder à tous les autres en utilisant uniquement les six tunnels qui les relient entre eux. Déterminer le nombre maximal de groupes de terminaux connexes.