IMO Selektion 2005 Lösungen

1. Die beiden Folgen $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ und $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ enthalten zusammen jede der Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ genau einmal. Bestimme den Wert der Summe

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|.$$

1. Lösung

Es gilt stets $|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$. Wir behaupten, dass für $1 \leq k \leq n$ immer $\max(a_k, b_k) \geq n + 1$ und $\min(a_k, b_k) \leq n$ ist. Nehme an, es gelte $a_k, b_k \leq n$. Dann sind die $n + 1$ Folgeglieder $a_1, \ldots, a_k, b_k, \ldots, b_n$ alle positiv, verschieden und höchstens gleich n, ein Widerspruch. Analog führt man die Annahme $a_k, b_k \geq n+1$ zum Widerspruch. Folglich durchlaufen die Zahlen $\min(a_k, b_k)$ genau die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ und die Zahlen $\max(a_k, b_k)$ die Menge $\{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}$. Es gilt daher

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| &= \sum_{k=1}^{n} \max(a_k, b_k) - \sum_{k=1}^{n} \min(a_k, b_k) \\ &= ((n + 1) + (n + 2) + \ldots + 2n) - (1 + 2 + \ldots + n) = n^2.\end{aligned}$$

2. Lösung

Nehme an, es gibt Indizes k und l mit $b_l = a_k + 1$. Ersetze die Folgen $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ durch die beiden neuen Folgen $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + 1, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_{l-1}, b_l - 1, b_{l+1}, \ldots, b_n)$. Man überlegt sich leicht, dass die beiden neuen Folgen ebenfalls die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Wir behaupten nun, dass sich die zu berechnende Summe bei dieser Operation nicht ändert und unterscheiden dazu drei Fälle.

(1) $k < l$. In diesem Fall ändert sich die Summe bei der Operation um

$$D = |a_k - b_k + 1| + |a_l - b_l + 1| - |a_k - b_k| - |a_l - b_l|.$$

Es gilt nun $a_k = b_l - 1 > b_k - 1$, also sind $a_k - b_k$ und $a_k - b_k + 1$ beide nichtnegativ. Analog folgt $a_l < a_k = b_l - 1$, also sind $a_l - b_l$ und $a_l - b_l - 1$ beide negativ. Folglich gilt

$$D = (a_k - b_k + 1) - (a_l - b_l + 1) - (a_k - b_k) + (a_l - b_l) = 0,$$

der Wert der Summe bleibt also unverändert.

(2) $k > l$ Eine analoge Argumentation liefert auch in diesem Fall

$$D = -(a_k - b_k + 1) + (a_l - b_l + 1) + (a_k - b_k) - (a_l - b_l) = 0.$$

(3) $k = l$. Die Summe ändert sich um

$$D = |(a_k + 1) - (b_k - 1)| - |a_k - b_k|.$$

Ausserdem ist $a_k = b_k - 1$, also wieder $D = |1| - |-1| = 0$.

Nach endlich vielen solchen Operationen können wir annehmen, dass gilt $b_1 < \ldots < b_n < a_n < \ldots < a_1$. dann ist aber $b_k = k$ und $a_k = 2n + 1 - k$ für $k = 1, \ldots, n$. In diesem Fall hat die Summe den Wert

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| = \sum_{k=1}^{n} 2n + 1 - 2k = n(2n+1) - 2\sum_{k=1}^{n} k = n(2n+1) - n(n+1) = n^2.$$

2. Finde den grösstmöglichen Wert des Ausdrucks

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)},$$

wobei x, y, z positive reelle Zahlen sind.

1. Lösung

Sei A der Nenner des Bruchs. Es gilt nach AM-GM

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)\left(x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2}\right)\left(y + \frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right)(z + 8 + 8) \\ &\geq 81\sqrt[3]{x^2/4} \cdot \sqrt[3]{xy^2/4} \cdot \sqrt[3]{yz^2/4} \cdot \sqrt[3]{64z} \\ &= 81xyz. \end{aligned}$$

Der Ausdruck ist also höchstens gleich $1/81$, Gleichheit gilt nur für $(x, y, z) = (2, 4, 8)$.

2. Lösung

Die Ungleichung von Hölder ergibt

$$\begin{aligned} (1+x)(x+y)(y+z)(z+16) &\geq (\sqrt[4]{1 \cdot x \cdot y \cdot z} + \sqrt[4]{x \cdot y \cdot z \cdot 16})^4 \\ &= (3\sqrt[4]{xyz})^4 = 81xyz. \end{aligned}$$

Der Ausdruck ist also höchstens gleich $1/81$, Gleichheit gilt für $(x, y, z) = (2, 4, 8)$.

Alternativ kann man auch wiederholt CS verwenden:

$$\begin{aligned}(1+x)(y+z)(x+y)(z+16) &\geq (\sqrt{1\cdot y}+\sqrt{x\cdot z})^2(\sqrt{x\cdot z}+\sqrt{y\cdot 16})^2\\ &\geq (\sqrt[4]{xyz}+2\sqrt[4]{xyz})^4 = 81xyz.\end{aligned}$$

3. Lösung

Wir bezeichnen den gegebenen Ausdruck mit $f(x,y,z)$. Wir benützen nun wiederholt folgendes

Lemma 1. *Für $\alpha,\beta>0$ nimmt die Funktion*

$$h(t)=\frac{t}{(\alpha+t)(t+\beta)}$$

ihr Maximum bei $t=\sqrt{\alpha\beta}$ an.

Beweis. Nach AM-GM gilt

$$\frac{1}{h(t)}=t+(\alpha+\beta)+\frac{\alpha\beta}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{\alpha\beta}{t}}+(\alpha+\beta)=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $t=\sqrt{\alpha\beta}$. □

Fixieren wir zuerst y,z, dann x,y, so folgt aus dem Lemma

$$f(x,y,z)\leq f(\sqrt{y},y,z)\leq f(\sqrt{y},y,4\sqrt{y}),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x=\sqrt{y}$ und $z=4\sqrt{y}$. Eine weitere Anwendung des Lemmas ergibt

$$f(\sqrt{y},y,4\sqrt{y})=\left(\frac{\sqrt{y}}{(1+\sqrt{y})(\sqrt{y}+4)}\right)^2\leq\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}.$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\sqrt{y}=2$. Insgesamt ist der Ausdruck also höchstens gleich $1/81$ mit Gleichheit genau dann wenn $(x,y,z)=(2,4,8)$.

3. Sei $n\geq 1$ eine natürliche Zahl. Ein reguläres $4n$-Eck sei irgendwie in endlich viele Parallelogramme zerlegt.

(a) Beweise, dass mindestens eines der Parallelogramme in der Zerlegung ein Rechteck ist.

(b) Bestimme die Summe der Flächen aller Rechtecke in der Zerlegung.

Lösung

Wir führen erst einige Bezeichnungen ein. Eine endliche Zerlegung des $4n$-Ecks in Parallelogramme nennen wir im Folgenden kurz *Zerlegung*. Für eine Zerlegung nennen wir jeden Eckpunkt eines Parallelogramms einen *Knoten*. Je nachdem, ob ein Knoten auf dem Rand oder im Innern des $4n$-Ecks liegt, heisst er *Randknoten* oder *innerer* Knoten. Jede Seite eines Parallelogramms nennen wir eine *Kante*. Ein Knoten, der im Innern einer Kante liegt, heisst T-Knoten. Eine Zerlegung, in der es keine inneren T-Knoten gibt, heisst *gut*.

Wir beweisen zuerst, dass sich jede Zerlegung zu einer guten Zerlegung verfeinern lässt.

Wir gehen aus von einer beliebigen Zerlegung, die nicht gut ist. Wähle einen beliebigen T-Knoten A_0. Dieser liegt im Innern einer eindeutig bestimmten Kante k_0, die zum Parallelogramm P_0 gehört. Die gegenüberliegende Kante k_1 von P_0 ist parallel zu k_0. Wähle den Punkt A_1 auf k_1, sodass P_0 durch die Strecke A_0A_1 in zwei kleinere Parallelogramme unterteilt wird, und betrachte diese feinere Zerlegung. Konstruiere analog Punkte $A_2, \dots, A_m$, solange bis A_m entweder ein Randknoten oder ein innerer Knoten der neuen Zerlegung ist, welcher kein T-Knoten ist. Dies ist nach endlich vielen Schritten immer der Fall, denn die Kanten $k_0, k_1, k_2, \dots$ sind alle parallel und liegen auf verschiedenen Geraden. Würde dieses Verfahren nicht abbrechen, wäre die Zerlegung nicht endlich. Mit dieser Konstruktion erhalten wir also eine feinere Zerlegung mit mindestens einem T-Knoten weniger. Nach endlich vielen solchen Konstruktionen resultiert daher eine feinere gute Zerlegung.

Diese Konstruktion der guten Zerlegung hat ausserdem die Eigenschaft, dass ein Rechteck in lauter Rechtecke zerlegt wird, und ein nicht-Rechteck in lauter nicht-Rechtecke. Die Verfeinerung ändert also weder etwas an der Existenz von Rechtecken, noch an der Summe der Flächen aller Rechtecke in der Zerlegung.

Wir beweisen nun (a) und (b). Nach obigen Ausführungen können wir annehmen, dass die Zerlegung gut ist. Betrachte irgend eine Kante k_1, die auf dem Rand des $4n$-Ecks liegt. Diese ist Seite eines einzigen Parallelogramm P_1. Die gegenüberliegende Seite k_2 von P_1 ist parallel zu k_1 und gehört zu einem einzigen weiteren Parallelogramm P_2. So fortfahrend erhalten wir eine Folge $P_1, P_2, \dots$ von Parallelogrammen, die nach endlich vielen Schritten die gegenüberligende Seite des $4n$-Ecks erreichen muss. Dies folgt aus der Parallelität der Kanten $k_1, k_2, \dots$ und der Endlichkeit der Zerlegung. Die Menge der Parallelogramme in einer solchen Folge nennen wir eine *Kette*. Eine Kette verbindet also stets gegenüberliegende Seiten des $4n$-Ecks und die oben konstruierten Kanten $k_1, k_2, \dots$ sind alle parallel und gleich lang. Zwei Ketten, die zu verschiedenen Paaren gegenüberliegender Seiten gehören, schneiden sich in genau einem Parallelogramm der Zerlegung, und die Seiten dieses Parallelogramms sind parallel zu den entsprechenden Seitenpaaren. Umgekehrt ist jedes Parallelogramm der Zerlegung der Schnitt von zwei eindeutig bestimmten solchen Ketten.

(a) Da es sich um ein $4n$-Eck handelt, gibt es zwei Seitenpaare, die senkrecht aufeinander stehen. Je zwei Ketten zu diesen Seitenpaaren schneiden sich in einem Rechteck.

(b) Umgekehrt ist jedes Rechteck Schnitt von zwei solchen Ketten. Fixiere zwei Seitenpaare wie in (a). Nehme an, die Ketten zum einen Seitenpaar haben die Breiten $a_1, \ldots, a_r$ und die Ketten zum anderen Paar die Breiten $b_1, \ldots, b_s$. Die Kette der Breite a_i schneidet die Kette der Breite b_j in einem Rechteck der Fläche $a_i b_j$. Die Summe der Flächen aller Rechtecke mit Seiten parallel zu diesen zwei Seitenpaaren ist folglich

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_i b_j = (a_1 + \ldots + a_r)(b_1 + \ldots + b_s) = 1 \cdot 1 = 1,$$

da die Seitenlänge des $4n$-Ecks gleich 1 ist. Es gibt nun genau n Paare senkrechter Seitenpaare, die Gesamtfläche aller Rechtecke in der Zerlegung ist somit gleich n.

4. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich im Punkt P äusserlich berühren. Ein dritter Kreis k berühre k_1 in B und k_2 in C, so dass k_1 und k_2 im Innern von k liegen. Sei A einer der Schnittpunkte von k mit der gemeinsamen Tangente von k_1 und k_2 durch P. Die Geraden AB und AC schneiden k_1 bzw. k_2 nochmals in R bzw. S. Zeige, dass RS eine gemeinsame Tangente von k_1 und k_2 ist.

1. Lösung

Wir untersuchen als erstes die Potenz von A an den Kreisen k_1 und k_2. Es gilt

$$AB \cdot AR = AP^2 = AC \cdot AS.$$

Daraus folgt, dass $\triangle ABC$ und $\triangle ASR$ ähnlich sind.
Sei T der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangengente von k und k_1 mit der gemeinsamen Tangente von k und k_2. Weil die Potenz von T zu allen drei Kreisen gleich gross ist, muss T auch auf der Potenzlinie von k_1 und k_2, also AP liegen. Wir bezeichnen $\alpha \doteq \sphericalangle ARS$. Es folgt nun

- $\sphericalangle ACB = \alpha$ ($\triangle ABC \sim \triangle ASR$)
- $\sphericalangle TBA = \alpha$, falls T auf derselben Seite von BC liegt wie A.
  $\sphericalangle TBA = 180° - \alpha$, falls A und T auf verschiedenen Seiten von BC liegen.
  (Tangentenwinkelsatz an k)
- $\sphericalangle RPB = \alpha$ (Tangentenwinkelsatz an k_1)

$\sphericalangle ARP$ ist ein Aussenwinkel von $\triangle BPR$. Es gilt deshalb

$$\sphericalangle SRP = \sphericalangle ARP - \alpha = \sphericalangle RBP + \sphericalangle RPB - \alpha = \sphericalangle RBP + \alpha - \alpha = \sphericalangle RBP.$$

Nach dem Tangentenwinkelsatz liegt RS somit tangential an k_1. Analog zeigt man, dass RS auch tangential an k_2 liegt.

2. Lösung

Anstelle des Tangentenschnittpunktes T verläuft diese Lösung über die Kreisemittelpunkte M_1, M_2 bzw. M. Wir bezeichnen $\alpha \doteq \sphericalangle ARS$. Es folgt nun

- $\sphericalangle ACB = \alpha$ ($\triangle ABC \sim \triangle ASR$)
- $\sphericalangle AMB = 2\alpha$ (Zentri-Peripherie-Winkelsatz)
- $\sphericalangle ABM = 90° - \alpha$ (Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck ABM)
- $\sphericalangle RBM_1 = 90° - \alpha$ (B, M_1, M liegen auf einer Geraden, ebenso B, R, A)
- $\sphericalangle RM_1B = 2\alpha$ (Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck RBM_1)
- $\sphericalangle RPB = \alpha$ (Zentri-Peripherie-Winkelsatz)

Man fährt nun fort wie bei der 1. Lösung.

5. Sei $p > 3$ eine Primzahl. Zeige, dass p^2 ein Teiler ist von

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}.$$

Lösung

Sei S die Summe in der Aufgabenstellung. Wegen $p \neq 2$ genügt es zu zeigen, dass $2S$ durch p^2 teilbar ist. Es gilt modulo p^2

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=1}^{p-1} (p-k)^{2p+1} + k^{2p+1} \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \left(p^{2p+1} - + \ldots - \binom{2p+1}{2} p^2 k^{2p-1} + \binom{2p+1}{1} pk^{2p} - k^{2p+1} \right) + k^{2p+1} \\ &\equiv \sum_{k=1}^{p-1} \binom{2p+1}{1} pk^{2p} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} pk^{2p} = p \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p}. \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass die letzte Summe durch p teilbar ist. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ für $1 \leq k \leq p-1$. Damit folgt modulo p

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^2 = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}.$$

Da der Zähler der rechten Seite durch p teilbar ist, der Nenner wegen $p > 3$ aber nicht, ist die gesamte rechte Seite durch p teilbar. Dies ist war zu zeigen.

6. Sei T die Menge aller Tripel (p, q, r) von nichtnegativen ganzen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f : T \to \mathbb{R}$ für die gilt

$$f(p,q,r) = \begin{cases} 0 & \text{für } pqr = 0, \\ 1 + \frac{1}{6}\{f(p+1,q-1,r) + f(p-1,q+1,r) \\ +f(p-1,q,r+1) + f(p+1,q,r-1) & \text{sonst.} \\ +f(p,q+1,r-1) + f(p,q-1,r+1)\} \end{cases}$$

Lösung

Wir beweisen zuerst, dass höchstens eine solche Funktion existiert. Nehme an, f und g erfüllen die Bedingungen der Aufgabe. Für die Funktion $h = f - g$ gilt dann

$$h(p,q,r) = \begin{cases} 0 & \text{für } pqr = 0, \\ \frac{1}{6}\{h(p+1,q-1,r) + h(p-1,q+1,r) \\ +h(p-1,q,r+1) + h(p+1,q,r-1) & \text{sonst.} \\ +h(p,q+1,r-1) + h(p,q-1,r+1)\} \end{cases}$$

Die sieben Punkte, an welchen h in der definierenden Gleichung ausgewertet wird, liegen alle auf einer Ebene der Form $p+q+r = n$. Auf dieser Ebene liegen nur *endlich* viele Punkte aus T. Wir zeigen, dass h auf jeder solchen Ebene identisch verschwindet. Fixiere $n \geq 0$ und nehme an, $M = h(p_0, q_0, r_0)$ sei das Maximum von h auf der Ebene $p + q + r = n$. Wir können annehmen, dass $p_0q_0r_0 \neq 0$ gilt, ansonsten ist $M = 0$. Aus der Funktionalgleichung und der Maximalität von M folgt, dass h auch an den 6 Punkten $(p_0 + 1, q_0 - 1, r_0), \ldots, (p_0, q_0 - 1, r_0 + 1)$ den Wert M annimmt. Insbesondere ist $h(p_0 - 1, q_0 + 1, r_0) = M$. Durch Wiederholen dieses Arguments folgt $M = h(p_0, q_0, r_0) = h(p_0 - 1, q_0 + 1, r_0) = \ldots = h(0, q_0 + p_0, r_0) = 0$.

Dieselbe Argumentation, angewendet auf $-h$, ergibt dass das Minimum von h auf der Ebene $p + q + r = n$ ebenfalls gleich 0 ist, folglich verschwindet h identisch.

Schliesslich rechnet man leicht nach, dass die Funktion

$$f(p,q,r) = \begin{cases} 0 & \text{für } p = q = r = 0, \\ \dfrac{3pqr}{p+q+r} & \text{sonst.} \end{cases}$$

alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Sie ist daher die einzige Lösung.

7. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass sich das Polynom

$$(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2) \cdots (x^2 - n^2) + 1$$

nicht als Produkt von zwei nichtkonstanten Polynomen mit ganzen Koeffizienten schreiben lässt.

Lösung

Sei p das Polynom in der Aufgabe. Nehme an, es gelte $p(x) = r(x)s(x)$ für zwei nichtkonstante Polynome r, s mit ganzen Koeffizienten. Für $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ ist dann

$$1 = p(k) = r(k)s(k).$$

Da beide Faktoren rechts ganze Zahlen sind, gilt somit $r(k) = s(k) = \pm 1$. Das Polynom $r - s$ hat höchstens den Grad $2n - 1$, besitzt aber die $2n$ Nullstellen $\pm 1, \ldots, \pm n$, somit verschwindet es identisch. Dann ist $p(x) = r(x)^2$ aber das Quadrat eines Polynoms und insbesondere ist $p(0)$ eine Quadratzahl. Nun gilt aber $p(0) = (-1)^n (n!)^2 + 1$. Ist $n \geq 3$ ungerade, dann ist $p(0)$ negativ, kann also keine Quadratzahl sein. Ist n gerade, dann gilt

$$(n!)^2 < p(0) < (n! + 1)^2,$$

Also ist $p(0)$ wieder keine Quadratzahl, Widerspruch.

8. Betrachte einen See mit zwei Inseln darin und sieben Städten am Ufer. Die Inseln und Städte nennen wir im Folgenden kurz *Orte*. Zwischen genau den folgenden Paaren von Orten besteht eine Schiffsverbindung:

(i) zwischen den beiden Inseln,

(ii) zwischen jeder Stadt und jeder Insel,

(iii) zwischen zwei Städten genau dann, wenn sie nicht benachbart sind.

Jede dieser Verbindungen wir von genau einem von zwei konkurrenzierenden Schiffsunternehmen angeboten. Beweise, dass es stets drei Orte gibt, sodass es zwischen je zwei dieser Orte Schiffsverbindungen desselben Unternehmens existieren.

Lösung

Wir formulieren die Aufgabe um in die Sprache der Graphentheorie. Die Inseln werden durch Punkte A, B repräsentiert, die sieben Städte durch Punkte $S_1, \ldots, S_7$. Zwei Städte sind benachbart, falls sie aufeinanderfolgende Indizes (mod 7) haben. Je zwei dieser Punkte sind mit einer Kante verbunden, ausser benachbarten Städten. Jede dieser 29 Kanten ist rot oder grün gefärbt (je nach Schiffsunternehmen), und wir müssen zeigen, dass es in diesem Graphen stets ein monochromatisches Dreieck gibt. Wir können annehmen, dass AB rot ist.

1. Lösung

Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) Nehme an, es gibt zwei rote Kanten von A zu zwei nicht benachbarten Städten S_i, S_j. Ist eine der Kanten BS_i, BS_j ebenfalls rot, dann ist AS_iB oder AS_jB ein rotes Dreieck. Nehme also an, diese beiden Kanten sind grün. Ist nun S_iS_j rot, dann ist AS_iS_j ein rotes Dreieck, ist S_iS_j grün, dann ist BS_iS_j ein grünes Dreieck.

(2) Nehme an, es gibt keine zwei roten Kanten von A zu zwei nicht benachbarten Städten. Dann gibt es entweder gar keine rote Kante von A zu einer Stadt, oder es gibt genau eine, oder es gibt genau zwei zu benachbarten Städten. Nach Umnummerierung können wir also annehmen, dass AS_1, AS_2, AS_3, AS_4, AS_5 alle grün sind. Beachte, dass die Städte A_1, A_3, A_5 paarweise nicht benachbart sind. Ist nun eine Kante des Dreiecks $A_1A_3A_5$ grün, dann bildet sie mit A ein grünes Dreieck. Sonst sind alle rot und dann ist $A_1A_3A_5$ ein rotes Dreieck.

2. Lösung

Nehme an, es gibt kein monochromatisches Dreieck. Betrachte die sieben Mengen

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{S_1, S_3, S_5\} \\
M_2 &= \{S_2, S_4, S_6\} \\
M_3 &= \{S_3, S_5, S_7\} \\
M_4 &= \{S_4, S_6, S_1\} \\
M_5 &= \{S_5, S_7, S_2\} \\
M_6 &= \{S_6, S_1, S_3\} \\
M_7 &= \{S_7, S_2, S_4\}
\end{aligned}$$

Die drei Städte in jeder dieser Mengen sind paarweise nicht benachbart. Betrachte $M_\alpha = \{S_i, S_j, S_k\}$ und nehme an, die Kanten AS_i, AS_j, AS_k seien alle grün. Ist dann eine der Kanten S_iS_j, S_jS_k, S_kS_i ebenfalls grün, dann ergibt das mit A ein grünes Dreieck. Sind diese Kanten alle rot, dann ist $S_iS_jS_k$ ein rotes Dreieck, Widerspruch. Folglich ist mindestens eine der Kanten AS_i, AS_j, AS_k rot. Da jede Stadt in genau 3 der Mengen M_α auftaucht, folgt insgesamt dass mindestens drei Kanten AS_a, AS_b, AS_c rot sind. Die Kanten BS_a, BS_b, BS_c sind alle grün, sonst gibt es ein rotes Dreieck mit AB. Mindestens zwei der Städte S_a, S_b, S_c sind nicht benachbart, oBdA sind das S_a, S_b. Unabhängig von der Farbe der Kante S_aS_b haben wir nun aber ein monochromatisches Dreieck mit A oder B, Widerspruch.

3. Lösung

Nehme an, es gibt kein monochromatisches Dreieck. Wir benützen folgende zwei triviale Beobachtungen:

(1) Unter je drei Städten gibt es immer zwei nicht benachbarte.

(2) Unter je fünf Städten gibt es immer drei, die paarweise nicht benachbart sind.

Wir setzen

$$M = \{k \mid AS_k \text{ ist grün}\}, \qquad N = \{k \mid BS_k \text{ ist grün}\}.$$

Folgendes gilt für diese Mengen:

(i) $M \cup N = \{1, \dots, 7\}$.
In der Tat, wäre $k \notin M \cup N$, dann sind AS_k und BS_k rot, also ist AS_kB ein rotes Dreieck, Widerspruch.

(ii) $|M \setminus N| \leq 2$, $|N \setminus M| \leq 2$.
Nehme an, $S_i, S_j, S_k \in M \setminus N$. Wegen (1) sind zwei dieser Städte nicht benachbart, zum Beispiel S_i, S_j. Nach Konstruktion sind AS_i und AS_j grün, aber BS_i und BS_j rot. Unabhängig von der Farbe von S_iS_j ergibt das ein monochromatisches Dreieck, Widerspruch.

(iii) $|M|, |N| \leq 4$.
Nehme an, $|M| \geq 5$. Unter den fünf Städten, die mit einer grünen Kante mit A verbunden sind, gibt es nach (2) drei paarweise nicht benachbarte S_i, S_j, S_k. Sind zwei dieser Städte mit einer grünen Kante verbunden, ergibt das ein grünes Dreieck mit A. Wenn keine grün ist, dann ist $S_iS_jS_k$ ein rotes Dreieck, Widerspruch.

Daraus folgt nun aber

$$7 \overset{(i)}{=} |M \cup N| = |M| + |N \setminus M| \overset{(ii),(iii)}{\leq} 4 + 2 = 6,$$

ein Widerspruch.

9. Sei $A_1A_2 \dots A_n$ ein reguläres n-Eck. Die Punkte $B_1, \dots, B_{n-1}$ sind wie folgt definiert:

- Für $i = 1$ oder $i = n-1$ ist B_i der Mittelpunkt der Seite A_iA_{i+1};
- Für $i \neq 1, i \neq n-1$ sei S der Schnittpunkt von A_1A_{i+1} und A_nA_i. Der Punkt B_i ist dann der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle A_iSA_{i+1}$ mit A_iA_{i+1}.

Beweise, dass gilt

$$\sphericalangle A_1B_1A_n + \sphericalangle A_1B_2A_n + \ldots + \sphericalangle A_1B_{n-1}A_n = 180^\circ.$$

Lösung

Wir beginnen mit folgendem

Lemma 2. *Sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez, wobei $AB \parallel CD$. Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in S. Sei M der Mittelpunkt von BC und die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CSB$ schneide BC in N. Dann gilt $\sphericalangle AMD = \sphericalangle AND$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $ADNM$ ein Sehnenviereck ist. Der Schnittpunkt von AD und BC sei X und sei $XA = XB = a, XC = XD = b$. Aus der bekannten Eigenschaft für Winkelhalbierende und dem Strahlensatz folgt

$$\frac{BN}{CN} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}.$$

Wir berechnen nun

$$\frac{BC}{CN} = \frac{BN + CN}{CN} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}.$$

Daraus erhalten wir

$$CN = BC \cdot \frac{b}{a+b} = (a-b) \cdot \frac{b}{a+b}.$$

Es gilt

$$XN \cdot XM = \left(b + (a-b) \cdot \frac{b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{2} = a \cdot b = XD \cdot XA.$$

Nach dem Potenzsatz ist $ADNM$ somit ein Sehnenviereck.

□

Sei C_i der Mittelpunkt der Seite A_iA_{i+1} $(i \leq n-1)$ und sei Σ die linke Seite, der zu beweisenden Gleichung. Für $1 < i < n-1$ ist das Viereck $A_1A_iA_{i+1}A_n$ entweder ein gleichschenkliges Trapez mit nichtparallelen Schenkeln A_1A_n und A_iA_{i+1} oder ein Rechteck. Im ersten Fall folgt aus dem Lemma $\sphericalangle A_1B_iA_n = \sphericalangle A_1C_iA_n$, im zweiten Fall gilt $B_i = C_i$ und die Winkel sind ebenfalls gleich. Somit haben wir

$$\Sigma = \sphericalangle A_1C_1A_n + \sphericalangle A_1C_2A_n + \ldots + \sphericalangle A_1C_{n-1}A_n.$$

Weil $A_1A_2 \ldots A_n$ ein reguläres n-Eck ist, sind für $i = 2, \ldots, n-1$ die Dreiecke $A_1C_iA_n$ und $A_{n+2-i}C_1A_{n+1-i}$ kongruent. Für diese i gilt deshalb $\sphericalangle A_1C_iA_n = \sphericalangle A_{n+1-i}C_1A_{n+1-i}$ und somit

$$\Sigma = A_1C_1A_n + \sphericalangle A_nC_1A_{n-1} + \ldots + \sphericalangle A_3C_1A_2 = \sphericalangle A_1C_1A_2 = 180°.$$

10. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und seien M und N zwei Punkte auf BC, so dass $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. Seien P und Q die Projektionen von M bzw. N auf AC bzw. AB. Zeige, dass $APHQ$ ein Sehnenviereck ist.

1. Lösung

Die Translation um den Vektor $\overrightarrow{BM}$ bildet B auf M und C auf N ab. Sei G das Bild von H bei dieser Translation. Wir zeigen nun, dass P, Q und H auf dem Thaleskreis über der Strecke AG liegen.

Die Gerade BH steht senkrecht auf AC, somit auch das Bild, die Gerade MG. Daraus folgt $\sphericalangle APG = 90°$ und P liegt auf dem Thaleskreis über AG. Analog für Q.

Die Gerade HG ist parallel zum Vektor $\overrightarrow{BM}$ und somit parallel zur Geraden BC. Der Winkel $\sphericalangle AHG$ ist somit auch rechtwinklig.

2. Lösung

Wir nehmen oBdA an, dass M auf der Halbgeraden BC mit Ursprung B liegt. Die Punkte E und F seien die Projektionen von B bzw. C auf AC bzw. AB. Damit $APHQ$ ein Sehnenviereck ist, genügt es zu zeigen, dass $\sphericalangle HPE = \sphericalangle HQF$. Dies ist der Fall, wenn die beiden Dreiecke HPE und HQF ähnlich sind. Wir wollen dies zeigen. Nach Konstruktion gilt $\sphericalangle HEP = \sphericalangle HFQ = 90°$. Es bleibt noch die folgende Gleichung zu beweisen.

$$\frac{HE}{PE} = \frac{HF}{QF} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{HE}{HF} = \frac{PE}{QF}$$

Wir formen diese Gleichung nun um, bis es klar wird, dass sie stimmt. Die beiden Dreiecke HEC und HFB haben zwei gleiche Winkel und sind somit ähnlich. Es gilt also

$$\frac{CE}{BF} = \frac{HE}{HF} = \frac{PE}{QF} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{PE}{CE} = \frac{QF}{BF}.$$

Die Geraden BE und MP stehen beide rechtwinklig auf AC und sind somit parallel. Analog sind die Geraden CF und NQ parallel. Mit der Voraussetzung, dass $BM = CN$ gilt somit nach Strahlensatz

$$\frac{PE}{CE} = \frac{BM}{BC} = \frac{CN}{BC} = \frac{QF}{BF}.$$

Dies ist genau, was wir noch zu zeigen hatten.

3. Lösung

OBdA liegen die Punkte M, B, N, C in dieser Reihenfolge auf BC. Sei R der Schnittpunkt von MP mit NQ. Wegen $|MB| = |NC|$ ist RH parallel zu BC. Es gilt $\sphericalangle BAH = 90° - \beta$, $\sphericalangle BNQ = 90° - \beta$ und $\sphericalangle CMP = 90° - \gamma$. Wegen der Parallelität von RH und BC ist auch $\sphericalangle NRH = 90° - \beta$, also ist $AQRH$ ein Sehnenviereck. Es genügt nun zu zeigen, dass $\sphericalangle RQH = \sphericalangle RPH$ gilt.

Seien H_B und H_C die Höhenfusspunkte auf AC und AB. Es gilt $\sphericalangle RQH = \sphericalangle QHH_C$ und $\sphericalangle RPH = \sphericalangle PHH_B$. Es genügt daher zu zeigen, dass die Dreiecke QHH_C und PHH_B ähnlich sind. Einerseits gilt trivialerweise

$$\frac{|HH_C|}{|HH_B|} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Andererseits erhalten wir

$$\frac{|H_CQ|}{|RH|} = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta, \qquad \frac{|H_BP|}{|RH|} = \sin(90^\circ - \gamma) = \cos\gamma,$$

Also sind die beiden Dreiecke ähnlich:

$$\frac{|HH_C|}{|HH_B|} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{|H_CQ|}{|H_BP|}.$$

11. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $f(m)^2 + f(n)$ ein Teiler ist von $(m^2+n)^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Lösung

Mit $m = n = 1$ folgt, dass $f(1)^2 + f(1)$ ein Teiler von 4 ist, folglich ist $f(1) = 1$. Für $m = 1$ erhalten wir

$$f(n) + 1 \mid (n+1)^2. \tag{1}$$

Für $n = 1$ erhalten wir

$$f(m)^2 + 1 \mid (m^2+1)^2. \tag{2}$$

Sei p eine Primzahl. Mit $n = p-1$ folgt aus (1), dass $f(p-1)+1$ ein Teiler von p^2 ist. Daher gilt $f(p-1) = p-1$ oder $f(p-1) = p^2-1$. Nehme an, letzteres sei der Fall. Aus (2) folgt dann $(p^2-1)^2 - 1 \le ((p-1)^2+1)^2$. Für $p > 1$ gilt aber

$$((p-1)^2+1)^2 = (p^2-2p+2)^2 \le (p^2-2)^2 < (p^2-1)^2 - 1,$$

Widerspruch. Daher ist $f(p-1) = p-1$.

Sei k eine natürliche Zahl mit $f(k) = k$, dann folgt

$$k^2 + f(n) = f(k)^2 + f(n) \mid (k^2+n)^2.$$

Ausserdem ist

$$(k^2+n)^2 = ((k^2+f(n)) + (n-f(n))^2 = A \cdot (k^2+f(n)) + (f(n)-n)^2$$

für eine ganze Zahl A. Daher gilt auch

$$k^2 + f(n) \mid (f(n)-n)^2. \tag{3}$$

Dies ist richtig für unendlich viele natürliche Zahlen k, nämlich zum Beispiel für $k = p-1$, wenn p prim ist. Daraus folgt aber, dass die rechte Seite von (3) verschwinden muss. Also gilt $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Lösung

Wir berechnen die ersten paar Werte von f. Wie in der ersten Lösung findet man $f(1) = 1$. Aus (2) erhalten wir $f(2)^2 + 1 \mid 25^2$, also ist $f(2) = 2$. Analog findet man $f(4)^2 + 1 \mid 17^2$, also $f(4) = 4$ und $f(6)^2 + 1 \mid 37^2$, also $f(6) = 6$. Mit $m = 2$ und $n = 3$ erhalten wir $4 + f(3) \mid 49$, daher ist $f(3) = 3$ oder $f(3) = 45$. Andererseits gilt wegen (1) $f(3) + 1 \mid 16$, folglich ist $f(3) = 3$. Schliesslich folgt mit $m = 2$, $n = 3$ dass $4 + f(5) \mid 81$, somit $f(5) = 5$ oder $f(5) = 23$ oder $f(5) = 77$. Andererseits gilt nach (1) $f(5) + 1 \mid 36$, es bleibt nur die Möglichkeit $f(5) = 5$.

Wir beweisen nun induktiv, dass $f(n) = n$ gilt für alle natürlichen Zahlen n. Nach obigen Rechnungen ist dies richtig für $n \le 6$. Sei nun $n \ge 7$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt (3) für $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Nehme nun an, dass $f(n) \neq n$. Für $k = n-1$ erhalten wir insbesondere $(n-1)^2 + f(n) \le (f(n) - n)^2$. Dies ist äquivalent zu $(f(n) - 2n)(f(n) - 1) \ge 1$, also ist $f(n) > 2n > n$. Wir behaupten, dass es natürliche Zahlen $a, b \le n-1$ gibt, sodass $f(n) + a^2$ und $f(n) + b^2$ teilerfremd sind. Ist $f(n)$ gerade, dann wähle $a = 1$ und $b = 3$, ist $f(n)$ ungerade, dann wähle $a = 2$ und $b = 6$. Dies ist möglich wegen $n \ge 7$. Mit der Teilerfremdheit und (3) folgt daraus

$$(a^2 + f(n))(b^2 + f(n)) \mid (f(n) - n)^2.$$

Andererseits ist die linke Seite grösser als $f(n)^2$, die rechte aber kleiner als $f(n)^2$ wegen $f(n) > n$. Dies ist ein Widerspruch, folglich gilt $f(n) = n$.

12. Sei A eine $m \times m$-Matrix. Sei X_i die Menge der Einträge in der i-ten Zeile und Y_j die Menge der Einträge in der j-ten Spalte, $1 \le i, j \le m$. A heisst *cool*, wenn die Mengen $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m$ alle verschieden sind. Bestimme den kleinsten Wert für n, sodass eine coole 2005×2005-Matrix mit Einträgen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ existiert.

Lösung

Sei $\mathcal{X}$ die Menge der X_i und $\mathcal{Y}$ die Menge der Y_j. Es muss gelten $2^n \ge |\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}| = 2 \cdot 2005$, also $n \ge 12$. Nehme an, $n = 12$ wäre möglich. Genau $2^{12} - 2 \cdot 2005 = 86$ Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 12\}$ liegen nicht in $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Zentral ist die einfache Beobachtung, dass jede Zeile mit jeder Spalte ein gemeinsames Element besitzt:

$$X_i \cap Y_j \neq \emptyset, \qquad \text{für } 1 \le i, j \le 2005. \tag{4}$$

Nehme an, es gibt i, j, sodass $|X_i \cup Y_j| \le 5$ gilt. Da jede Spalte und jede Zeile ein gemeinsames Element mit dieser Menge hat, liegt keine Teilmenge des Komplements in $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Es sind aber mindestens $2^7 > 86$ Teilmengen, Widerspruch. Also gilt

$$|X_i \cup Y_j| \ge 6, \qquad \text{für } 1 \le i, j \le 2005.$$

Daraus folgt, dass alle Zeilen oder alle Spalten mindestens je vier verschiedene Einträge haben, oBdA seien dies die Zeilen. Setze $k = \min |X_i| \geq 4$ und wähle α mit $|X_\alpha| = k$. Wegen (4) liegt keine Teilmenge des Komplements von X_α in $\mathcal{Y}$. Nach Definition von k liegt daher keine Teilmenge des Komplements von X_α mit weniger als k Elementen in $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Für $k = 4$ sind dies

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 93 > 86,$$

Teilmengen, für $k = 5$ sind es

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 99 > 86,$$

Widerspruch. Folglich gilt $k \geq 6$. Die Anzahl höchstens 5-elementiger Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 12\}$ beträgt

$$\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{12}{5} = 1586.$$

Keine davon liegt in $\mathcal{X}$, und mindestens $1586 - 86$ davon liegen in $\mathcal{Y}$. Die Komplemente dieser Mengen haben mindestens 7 Elemente und liegen ebenfalls nicht in $\mathcal{X}$. Folglich kommen in $\mathcal{X}$ mindestens

$$1586 + (1586 - 86) = 3086 > 2^{12} - 2005$$

Mengen nicht vor, ein Widerspruch. Es gilt daher $n \geq 13$.

Wir beweisen nun, dass für $n = 13$ eine coole 2005×2005-Matrix existiert. Zuerst konstruieren wir induktiv eine coole $2^n \times 2^n$-Matrix A_n mit Einträgen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n + 2\}$. Setze

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

und definiere dann rekursiv

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & B_n \end{pmatrix},$$

dabei ist B_n die $2^n \times 2^n$-Matrix, deren Einträge alle gleich $n+2$ sind. Seien $X_1, \ldots, X_{2^n}$, $Y_1, \ldots, Y_{2^n}$ die Zeilen- bzw. Spaltenmengen von A_n. Dann sind die Zeilenmengen von A_{n+1} gegeben durch $X_1, \ldots, X_{2^n}, X_1 \cup \{n + 2\}, \ldots, X_{2^n} \cup \{n + 2\}$, die Spaltenmengen durch $Y_1, \ldots, Y_{2^n}, Y_1 \cup \{n + 2\}, \ldots, Y_{2^n} \cup \{n + 2\}$. Mit A_n ist somit auch A_{n+1} cool. Schliesslich überlegt man sich leicht, dass auf Grund der speziellen Form der so konstruierten Matrizen auch die obere linke 2005×2005-Teilmatrix von A_{11} cool ist. Dies beendet den Beweis.