OSM Tour final 2005

premier examen - le 24 mars 2005

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit ABC un triangle et D, E, F les milieux des côtés BC, CA, AB respectivement. Les médianes AD, BE et CF se coupent en S, le centre de gravité. Au moins deux des quadrilatères

$$AFSE, \quad BDSF, \quad CESD$$

sont des quadrilatères inscrits. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

2. Soient $4n$ points alignés tels que $2n$ d'entre eux sont blancs et $2n$ sont noirs. Montrer qu'il y a parmi eux une suite de $2n$ points consécutifs avec n points noirs et n points blancs.

3. Prouver pour tout $a_1, \ldots, a_n > 0$ l'inéquation suivante et déterminer tous les cas d'égalité:

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k \leq \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^k.$$

4. Déterminer tous les ensembles M de nombres naturels avec la propriété suivante: Si a et b (pas nécessairement distincts) sont des éléments de M,

$$\frac{a+b}{\operatorname{pgcd}(a,b)}$$

se trouve également dans M.

5. On *taille* un n-gone convexe de la manière suivante: on choisit deux côtés adjacents AB et BC et on les remplace par les segments AM, MN, NC, où $M \in AB$ et $N \in BC$ sont des points arbitraires à l'intérieur des segments. Autrement dit on coupe un sommet et on obtient un $(n+1)$-gone.
On part d'un hexagone régulier $\mathcal{P}_6$ d'aire 1 et on le taille pour obtenir une suite de polygones convexes $\mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_8, \ldots$. Montrer que l'aire de $\mathcal{P}_n$ est plus grand que $\frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 6$, indépendamment de la façon dont on a taillé.

OSM Tour final 2005

deuxième examen - le 25 mars 2005

Durée: 4 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

6. Soient a, b, c des nombres réels positifs avec $abc = 1$. Déterminer toutes les valeurs que la somme

$$\frac{1+a}{1+a+ab} + \frac{1+b}{1+b+bc} + \frac{1+c}{1+c+ca}$$

peut prendre.

7. Soit $n \geq 1$ un nombre naturel. Déterminer toutes les solutions entières positives de l'équation

$$7 \cdot 4^n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

8. Soit ABC un triangle aigu. Soient M et N des points arbitraires sur les côtés AB et AC respectivement. Les cercles de diamètre BN et CM se coupent en P et Q. Montrer que les points P, Q et l'orthocentre du triangle ABC se trouvent sur une droite.

9. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, vérifiant la condition suivante pour tout $x, y > 0$:

$$f(yf(x))(x+y) = x^2(f(x) + f(y)).$$

10. Soit un tournoi de foot avec $n > 10$ équipes participantes. Chaque équipe joue exactement une fois contre toutes les autres équipes. Une victoire vaut deux points, un match nul un point, et une défaite ne donne pas de points. A la fin du tournoi on constate que chaque équipe a obtenu exactement la moitié de ses points dans les matches contre les 10 dernières équipes du classement (en particulier toutes ces 10 équipes ont gagné la moitié de leurs points contre les neuf autres). Déterminer toutes les valeurs possibles pour n et, pour ces valeurs, donner un exemple d'un tel tournoi.