Lösungen zur Vorrundenprüfung 2004

Zuerst einige Bemerkungen zum Punkteschema. Eine vollständige und korrekte Lösung einer Aufgabe ist jeweils 7 Punkte wert. Für komplette Lösungen mit kleineren Fehlern oder Ungenauigkeiten, die aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Richtigkeit der dargestellten Lösung haben, geben wir 6 Punkte. Bei unvollständigen Lösungen wird der Fortschritt und der Erkenntnisgewinn bewertet (Teilpunkte). Oft gibt es mehrere Lösungen für ein Problem. Versucht jemand zum Beispiel eine Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen zu lösen, erreicht auf dem ersten Weg 3 Punkte, auf dem zweiten 2 Punkte, dann wird seine Punktzahl nicht 5, sondern 3 sein. Punkte, die auf verschiedenen Wegen erreicht werden, sind also *nicht* kummulierbar. Die unten angegebenen Bewertungsschemen sind nur Orientierungshilfe. Gibt jemand eine alternative Lösung, dann werden wir versuchen, die Punktzahl entsprechend zu wählen, dass für gleiche Leistung gleich viele Punkte verteilt werden. Die Schemen sind stets wie folgt zu interpretieren:
Kommt jemand in seiner Lösung bis und mit hierhin, dann gibt das soviele Punkte.
Ausnahmen von dieser Regel sind jeweils ausdrücklich deklariert.

1. Finde alle natürlichen Zahlen a, b und n, sodass die folgende Gleichung gilt:

$$a! + b! = 2^n$$

Lösung:

Die Gleichung ist symmetrisch in a und b, daher können wir oBdA $a \leq b$ annehmen. Ist $a \geq 3$, dann ist die LS der Gleichung durch 3 teilbar, die RS aber nicht, Widerspruch. Ist $a = 1$, dann folgt $1 + b! = 2^n$. Für $b \geq 2$ ist die LS ungerade und grösser als 1, Widerspruch. Folglich gilt $b = 1$ und damit $n = 1$.
Ist $a = 2$, dann folgt analog $2 + b! = 2^n$. Für $b \geq 4$ ist die LS nicht durch 4 teilbar und grösser als 4, Widerspruch. Folglich gilt $b = 2$ und $n = 2$ oder $b = 3$ und $n = 3$.
Die einzigen Lösungstripel (a, b, n) sind also

$$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 3), (3, 2, 3).$$

Bemerkungen und Punkteschema:

Es führt wohl kein Weg daran vorbei, mit Teilbarkeit zu argumentieren, dass $a, b \geq 3$ nicht möglich ist. Für einen Beweis dieser Tatsache gab es 3 Punkte. Für Faktorisierungen der Form $a! + b! = a!(1 + b!/a!)$ gab es bis zu 2 Punkten, je nachdem, wie die Lösung fortgesetzt wurde. Eine eigentlich vollständige Lösung ohne Betrachtung des Falls $a = b = 1$ gab 6 Punkte.

2. Auf einem gewöhnlichen Schachbrett stehen 17 Türme. Zeige, dass man stets drei Türme auswählen kann, die sich gegenseitig nicht bedrohen. (Ein Turm kann in einem Zug beliebig viele Felder nach links, rechts, oben oder unten ziehen. Ein Turm bedroht einen anderen, falls er in einem Zug auf das Feld des anderen Turmes ziehen kann.)

1. Lösung:

Zwei Türme bedrohen sich genau dann, wenn sie in derselben Zeile oder Spalte stehen. Unterteile die 64 Felder wie folgt in 8 Schubfächer:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Wegen $17 = 2 \cdot 8 + 1$ stehen nach dem Schubfachprinzip drei Türme auf Feldern mit derselben Nummer. Diese drei bedrohen sich gegenseitig nicht, da sie in verschiedenen Zeilen und Spalten stehen.

2. Lösung:

Wegen $17 = 2 \cdot 8 + 1$ gibt es eine Zeile A, in der mindestens drei Türme stehen. Nun gibt es eine zweite Zeile B, in der mindestens zwei Türme stehen, denn sonst wären es höchstens $8 + 7 \cdot 1 = 15$ Türme. Es muss ausserdem noch eine dritte Zeile C mit einem Turm geben, wegen $17 = 2 \cdot 8 + 1$. Wähle nun einen der Türme in C. In B gibt es nun sicher einen Turm, der nicht in derselben Spalte liegt. In A kann man nun ebenfalls immer einen der drei Türme wählen, der in einer anderen Spalte liegt als die zwei schon gewählten. Diese drei Türme bedrohen sich nicht.

Bemerkungen und Punkteschema:

In dieser Aufgabe konnte man eigentlich nur 0 oder 7 Punkte machen. Ungenaue Argumentation oder nichtbeachtete Fälle gaben entsprechend Abzug.

3. Sei $ABCD$ ein Parallelogram. Die Punkte P und Q liegen im Innern von $ABCD$ auf der Diagonalen AC, dabei gilt $|AP| = |CQ| < \frac{1}{2}|AC|$. Die Gerade BP schneidet AD im Punkt E, die Gerade BQ schneidet CD in F. Zeige, dass EF parallel zur Diagonalen AC ist.

Lösung:

Bei Punkt P können wir den ersten Strahlensatz anwenden:

$$\frac{|PE|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|PC|}.$$

Ebenso bei Punkt Q:

$$\frac{|QF|}{|QB|} = \frac{|QC|}{|QA|}.$$

Nach Voraussetzung ist $|QC| = |PA|$ und $|QA| = |PC|$. Daher gilt

$$\frac{|PE|}{|PB|} = \frac{|QC|}{|QA|} = \frac{|QF|}{|QB|}.$$

Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes folgt daher die Behauptung.

Bemerkungen und Punkteschema:

Für die Erkenntnis, dass man die Umkehrung des ersten Strahlensatzes braucht gab es zwei Punkte. Viele versuchten die Aufgabe mit Winkeljagd zu lösen. Leider lässt sich die Voraussetzung $|AP| = |CQ|$ nur sehr mühsam mit Winkeln ausdrücken. Man müsste Sinussatz und Additionstheoreme verwenden.

4. Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit genau 100 verschiedenen positiven Teilern, sodass mindestens 10 dieser Teiler aufeinanderfolgende Zahlen sind.

Lösung:

Von 10 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist sicher eine durch 9, eine durch 8, eine durch 7 und eine durch 5 teilbar. Daher ist n durch $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ teilbar. Sei nun

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$$

die Primfaktorzerlegung von n, wobei $r \geq 0$, $e_k \geq 1$ und $a \geq 3$, $b \geq 2$, $c, d \geq 1$. Dann ist die Anzahl positiver Teiler von n gleich

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e_1+1)\cdots(e_r+1).$$

Nach Voraussetzung ist dies gleich $100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$, ein Vergleich mit den Faktoren in obiger Formel zeigt, dass $a = b = 4$ und $c = d = 1$ sowie $r = 0$ gelten muss. Die einzige mögliche Lösung ist daher $n = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 45360$. Diese Zahl besitzt nun tatsächlich genau 100 Teiler, unter denen die 10 aufeinanderfolgenden $1, 2, \ldots, 10$ vorkommen.

Bemerkungen und Punkteschema:
Die Formel für die Anzahl Teiler einer natürlichen Zahl ist 1 Punkt wert. Ein Vergleich der Faktoren mit $100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ und der daraus folgenden Erkenntnis, dass n höchstens 4 verschiedene Primteiler hat, gab 2 Punkte.
Weitere 1 bzw 2 Punkte gabs, wenn man bemerkt hat, dass n durch $2, 3, 5, 7$ bzw $4, 9, 5, 7$ teilbar ist.

5. $m \times n$ Punkte sind in einem quadratischen Gitter zu einem Rechteck angeordnet. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Punkte rot oder weiss zu färben, sodass unter je vier Punkten, die Ecken eines Einheitsquadrates bilden, genau zwei weisse und zwei rote vorkommen?

Lösung:

Wir betrachten das Gitter so, dass es m Zeilen und n Spalten hat. Wir färben die Punkte zeilenweise ein und beginnen mit der ersten Zeile. Nehme an, wir hätten die k-te Zeile schon eingefärbt.

Wir nennen eine Färbung der $k+1$-ten Zeile zulässig, wenn die Bedingung der Aufgabe für die k-te und $k+1$-te Zeile erfüllt ist. Jede zulässige Färbung der $k+1$-ten Zeile ist offenbar durch die Farbe eines beliebigen Punktes bereits vollständig bestimmt. Denn jeder Punkt in der $k+1$-ten Zeile bestimmt die Farbe der unmittelbar daneben liegenden Punkte. Daher gibt es höchstens zwei zulässige Färbungen der $k+1$-ten Zeile. Eine gibt es immer: die Inverse Färbung, wo kein Punkt dieselbe Farbe wie jener direkt darüber hat. Haben nun zwei nebeneinander liegende Punkte der k-ten Zeile dieselbe Farbe, dann ist die Farbe der beiden darunterliegenden Punkte eindeutig bestimmt, es gibt also nur eine zulässige Färbung der $k+1$-ten Zeile, eben die inverse. Sind die Punkte in der k-ten Zeile aber abwechselnd rot und weiss gefärbt, dann lässt sich die $k+1$-te Zeile auf zwei Arten zulässig färben, nämlich gleich wie die k-te oder invers dazu.

Es gibt genau 2 Möglichkeiten, die erste Zeile abwechselnd weiss und rot zu färben. Danach lässt sich jede weitere Zeile ebenfalls auf genau zwei Arten zulässig färben, wie wir oben erläutert haben. Insgesamt gibt es also 2^m solche Färbungen.

Für die übrigen $2^n - 2$ möglichen Färbungen der ersten Zeile gibt es stets zwei benachbarte Punkte mit derselben Farbe. Folglich lässt sich jede weitere Zeile auf genau eine Art zulässig färben. Es gibt als $2^n - 2$ solche Färbungen.

Insgesamt ergibt das die Lösung

$$2^m + 2^n - 2.$$

Bemerkungen und Punkteschema:
Eine erkennbare Strategie und Zielsetzung gab bereits 1 Punkt, unabhängig davon, ob sie zur Lösung führt oder nicht. Eine Beweisskizze ohne Erklärung der Details oder mit ungenügender Argumentation oder Klarheit gab bis zu 4 Punkte.