SMO - Tour préliminaire

Berne, Zurich - le 10 janvier 2004

Durée : 2 heures
Chaque problème vaut 7 points.

1. Trouver tous les nombres naturels a, b et n tels que l'équation suivante est satisfaite:

$$a! + b! = 2^n$$

2. Il y a 17 tours sur un échiquier ordinaire. Montrer que l'on peut toujours en choisir trois qui ne se menacent pas entre elles. (Une tour peut se déplacer verticalement ou horizontalement d'autant de cases qu'elle le veut. Une tour menace une autre au cas où la première peut se déplacer sur la case de la deuxième.)

3. Soit $ABCD$ un parallèlogramme. Les points P et Q se trouvent à l'intérieur de $ABCD$ sur la diagonale AC, où $|AP| = |CQ| < \frac{1}{2}|AC|$. La droite BP coupe AD en un point E, la droite BQ coupe CD en F. Montrer que EF est parallèle à la diagonale AC.

4. Trouver tous les nombres naturels n ayant exactement 100 diviseurs positifs différents, tels que au moins 10 de ces diviseurs sont consécutifs.

5. $m \times n$ points forment un rectangle sur une grille quadratique. De combien de manières différentes peut-on colorer les points en blanc et en rouge si l'on veut que parmi les sommets d'un carré unitaire il y ait exactement deux rouges et deux blancsü

Bonne chance!