OSM Tour final 2004

premier examen - le 2 avril 2004

Durée : 4 heures
Chaque exercice vaut sept points.

1. Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ. Une des tangentes de P au cercle touche ce dernier au point A. Une autre droite passant par P coupe Γ en deux points distincts B et C. La bissectrice de $\sphericalangle APB$ coupe AB en D et AC en E. Montrer que le triangle ADE est isocèle.

2. Soit M un ensemble de nombres réels ayant la propriété suivante : parmi trois points de M on peut toujours choisir deux tels que leur somme est dans M. Combien d'éléments l'ensemble M peut-il avoir au maximum ?

3. Soit p un nombre premier impair. Trouver tous les entiers k, tels que

$$\sqrt{k^2 - pk}$$

est un entier positif.

4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vérifiant la condition suivante pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2.$$

5. Soient a et b deux nombres positifs fixés. Trouver, en fonction de a et b, la plus petite valeur que la somme

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} + \frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)} + \frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)}$$

peut prendre, avec x, y, z des réels positifs.

OSM Tour final 2004

deuxième examen - le 3 avril 2004

Durée : 4 heures
Chaque exercice vaut sept points.

6. Détermine tout k, pour lequel existe un nombre naturel n, tel que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ finisse par exactement k zéros.

7. Etant donnés $m \geq 3$ points dans le plan, montrer que l'on peut toujours en choisir trois points A, B, C tels que

$$\sphericalangle ABC \leq \frac{180^\circ}{m}.$$

8. Soit donnée une liste de nombres naturels. On répète l'opération suivante: On choisit deux nombres quelconques a, b et on les remplace par le pgdc(a, b) et le ppmc(a, b). A démontrer que le contenu de la liste ne change plus après un certain nombre d'opérations.

9. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscit tel que $|AB|+|CD| = |BC|$. Montrer que l'intersection des bissectrices de $\sphericalangle DAB$ et $\sphericalangle CDA$ se trouve sur le côté BC.

10. Soit n un nomre naturel impair. Les cases d'un échiquier $n \times n$ sont colorées alternativement en blanc et en noir, de manière à avoir les quatres coins noirs. Un L-triomino est une pièce de la forme d'un L qui couvre exactement trois champs. Pour quelles valeurs de n est-il possible de couvrir toutes les cases noires avec des L-triominos sans que ces derniers soient juxtaposés sur une des cases? Trouver, pour ces valeurs de n, le nombre minimal de L-triominos nécessaires.