IMO sélection 2004

Premier test - 15. mai 2004

Temps: 4.5 heures
Chaque problème vaut 7 points.

1. Considérons l'ensemble S de tout les n-tuples $(X_1, \ldots, X_n)$, consistant des sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Pour chaque $a = (X_1, \ldots, X_n) \in S$ on définit

$$E(a) = \text{nombre d'éléments de } X_1 \cup \ldots \cup X_n.$$

Calculer explicitement la somme suivante

$$\sum_{a \in S} E(a).$$

2. Déterminer le plus grand nombre naturel n tel que

$$4^{995} + 4^{1500} + 4^n$$

est un carré.

3. Soit ABC un triangle isocèle avec $|AC| = |BC|$ et I le centre du cercle inscrit. Soit P un point sur le cercle circonscrit au triangle AIB, se trouvant à l'intérieur du triangle ABC. Les droites passant par P et parallèles à CA et à CB coupent AB en D et en E. La droite passant par P et parallèle à AB coupe CA en F et CB en G. Montrer que l'intersection des droites DF et EG se trouve sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

IMO sélection 2004

Second test - 16. mai 2004

Temps: 4.5 heures
Chaque problème vaut 7 points.

4. Soit a, b, c trois réels positifs avec $abc = 1$. Prouver l'inéquation suivante:

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} + \frac{bc}{b^5 + bc + c^5} + \frac{ca}{c^5 + ca + a^5} \leq 1.$$

5. Un *bloc de construction*, constitué de 7 cubes-unité, a la forme d'une cube $2 \times 2 \times 2$ avec un des coins (une cube-unité) manquant. Soit alors une cube de longueur de côté 2^n, $n \geq 2$, dont on enlève une cube-unité arbitraire. Montrer que le corps restant peut être reconstruit à partir de tels blocs de construction.

6. Trouver toutes les suites réelles finies $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telles que le nombre k apparaît exactement x_k fois dans la suite.

IMO Sélection 2004

troisième examen - le 12 juin 2004

Durée : 4.5 heures
Chaque problème vaut 7 points.

7. Pour quatre nombres réelles a, b, c, d, les équations suivantes sont satisfaites

$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}} \quad , \qquad b = \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}},$$
$$c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}} \quad , \qquad d = \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}.$$

Montrer que $abcd = 2004$.

8. Soit m un nombre naturel plus grand que 1. La suite $x_0, x_1, x_2, \dots$ est définie par

$$x_i = \begin{cases} 2^i, & \text{pour} \quad 0 \leq i \leq m-1; \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i-j} & \text{pour} \quad i \geq m. \end{cases}$$

Trouver le plus grand nombre k tel qu´il existe k termes consécutifs de la suite tous divisibles par m.

9. Soit X un ensemble avec n éléments et soient $A_1, A_2, \dots A_n$ des sous-ensembles distincts de X. Montrer qu´il existe un $x \in X$ tel que les ensembles

$$A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \dots, A_n \setminus \{x\}$$

sont deux à deux distincts.

IMO Sélection 2004

quatrième examen - le 13 juin 2004

Durée : 4.5 heures
Chaque problème vaut 7 points.

10. Soit $\triangle ABC$ un triangle aigu avec les hauteurs $\overline{AU}$, $\overline{BV}$, $\overline{CW}$ et l'orthocentre H. Soit X un point sur $\overline{AU}$, Y sur $\overline{BV}$, Z sur $\overline{CW}$, avec X, Y, Z tous distincts de H.

a) Si X, Y, Z, H se trouvent sur le même cercle, alors

$$[ABC] = [ABZ] + [AYC] + [XBC]$$

où $[PQR]$ désigne l'aire du $\triangle PQR$.

b) Montrer que l'inverse de a) est également vrai.

11. Trouver toutes les fonctions injectives $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que pour tout couple de nombres réels $x \neq y$ l´équation suivante est satisfaite

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}.$$

12. Trouver tous les nombres naturels pouvant être écrits sous la forme

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

avec a, b et c trois nombres naturels.