Lösungen zur Vorselektionsprüfung

Ich möchte zuerst einige Bemerkungen zum Punkteschema machen. Eine vollständige und korrekte Lösung einer Aufgabe ist jeweils 7 Punkte wert. Für komplette Lösungen mit kleineren Fehlern oder Ungenauigkeiten, die aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Richtigkeit der dargestellten Lösung haben, geben wir 6 Punkte. Bei unvollständigen Lösungen wird der Fortschritt und der Erkenntnisgewinn bewertet (Teilpunkte). Oft gibt es mehrere Lösungen für ein Problem. Versucht jemand zum Beispiel eine Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen zu lösen, erreicht auf dem ersten Weg 3 Punkte, auf dem zweiten 2 Punkte, dann wird seine Punktzahl nicht 5, sondern 3 sein. Punkte, die auf verschiedenen Wegen erreicht werden, sind also *nicht* kummulierbar. Die unten angegebenen Bewertungsschemen sind nur Orientierungshilfe. Gibt jemand eine alternative Lösung, dann werden wir versuchen, die Punktzahl entsprechend zu wählen, dass für gleiche Leistung gleich viele Punkte verteilt werden. Die Schemen sind stets wie folgt zu interpretieren:
Kommt jemand in seiner Lösung bis und mit hierhin, dann gibt das soviele Punkte.
Ausnahmen von dieser Regel sind jeweils ausdrücklich deklariert.

1. 67 Schüler schreiben eine Prüfung. Die Prüfung besteht aus 6 multiple-choice Fragen, die alle mit *ja* oder *nein* beantwortet werden müssen. Jeder Schüler beantwortet dabei alle 6 Fragen. Eine richtige Antwort auf die k-te Frage gibt k Punkte, eine falsche Antwort $-k$ Punkte.

(a) Zeige, dass mindestens zwei Schüler das Prüfungsblatt gleich ausgefüllt haben.

(b) Zeige, dass mindestens vier Schüler gleich viele Punkte erzielten.

Lösung:

(a) Es sind sechs Fragen zu beantworten. Zu jeder Frage gibt es genau 2 mögliche Antworten, insgesamt kann man das Prüfungsblatt also auf $2^6 = 64$ Arten ausfüllen. Da in der Klasse $67 > 64$ Schüler sind, müssen nach dem Schubfachprinzip zwei Schüler das Prüfungsblatt gleich ausgefüllt haben.

(b) Was für Punktzahlen sind möglich? Die grösstmögliche Punktezahl wird mit 6 richtigen Antworten erreicht, ist also $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, die kleinstmögliche Punktezahl ist -21. Ausserdem können nur ungerade Punktezahlen erreicht werden. Dafür gibt es mehrere Begründungen, zum Beispiel die folgende:
Die erste, dritte und fünfte Aufgabe geben je eine ungerade Punktezahl (ob positiv oder nicht ist egal), die anderen drei Aufgaben eine gerade Punktezahl. Jede

erreichbare Gesamtpunktezahl ist also die Summe von drei geraden und drei ungeraden Zahlen, also ungerade.
Man sieht unmittelbar, dass es genau 22 ungerade Zahlen k mit $-21 \leq k \leq 21$ gibt, also sind höchstens 22 verschiedene Gesamtpunktzahlen möglich (man überlegt sich leicht, dass es tatsächlich 22 sind, das wird aber nicht benötigt). Nun ist $67 > 3 \cdot 22$, nach dem Schubfachprinzip haben also mindestens vier Schüler gleich viele Punkte erzielt.

Bemerkungen und Punkteschema:

Die obige Lösung ist sehr direkt und im Wesentlichen wohl auch die einzige mögliche.

Teil a) gibt 3 Punkte. Teilpunkte:
Es gibt 64 Möglichkeiten, das Prüfungsblatt auszufüllen: 1 Punkt
Teil b) gibt 4 Punkte. Teilpunkte:
Die Punktzahlen sind alle ungerade: 1 Punkt,
Höchstens 22 mögliche Punktzahlen: 2 Punkte.

2. ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Das Lot von A auf BC schneide den Umkreis im Punkt $D \neq A$, und die Gerade BO schneide den Umkreis im Punkt $E \neq B$. Zeige, dass ABC und $BDCE$ denselben Flächeninhalt haben.

Lösung:

Wir berechnen alle Flächeninhalte über der gemeinsamen Basis BC. Sei P der Schnittpunkt von AD mit BC. Nach Voraussetzung ist $AD \perp BC$ und da O auf BE liegt, ist BE ein Durchmesser des Umkreises und daher $\angle BCE = 90$, also auch $CE \perp BC$. Damit können wir folgende Flächen berechnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(ABC) &= \overline{BC} \cdot \overline{AP}/2 \\ \mathrm{F}(BCD) &= \overline{BC} \cdot \overline{DP}/2 \\ \mathrm{F}(BCE) &= \overline{BC} \cdot \overline{CE}/2. \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\overline{AP} = \overline{DP} + \overline{CE}$. Die Gerade BC steht senkrecht auf AD und CE, also ist $AD \parallel CE$. Betrachte nun die Gerade m durch O, senkrecht zu AD und EC. Wegen $\overline{AO} = \overline{DO}$ sind A und D symmetrisch bezüglich m. Analog sieht man, dass C und E symmetrisch bezüglich m sind. Sei Q der Schnittpunkt von m mit AD. Dann haben wir also

$$\overline{AP} - \overline{CE}/2 = \overline{AQ} = \overline{DQ} = \overline{DP} + \overline{CE}/2,$$

und das ist die Behauptung.

Bemerkungen und Punkteschema:

Die Lösung erfordert im Wesentlichen zwei Ideen: Die Flächen alle über der Basis BC zu berechnen und die Symmetrie im zweiten Teil des Beweises zu sehen. Entsprechend werden die Punkte vergeben:

$\angle BCE = 90$: 1 Punkt,
Berechnung der drei Dreiecksflächen über BC: 2 Punkte,
Erkenntnis, dass es genügt $\overline{AP} = \overline{DP} + \overline{CE}$ zu zeigen: 3 Punkte,
Zusätzlich zu diesen Punkten:
Erkennen der Symmetrie von A, D sowie C, E bezüglich m (egal ob mit oder ohne Beweis): 1 Punkt.

Eine vollständige Lösung ohne Begründung für die Symmetrie von A, D und C, E ist 5 Punkte wert.

3. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$f((x-y)^2) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2$$

Lösung:

Wir setzen zuerst verschiedene Dinge für x und y ein:

$$\begin{aligned} x = y = 0 \quad &\Rightarrow \quad f(0) = f(0)^2 && (1)\\ y = 0 \quad &\Rightarrow \quad f(x^2) = x^2 + f(0)^2 && (2)\\ x = 0 \quad &\Rightarrow \quad f(y^2) = -2yf(0) + f(y)^2 && (3)\\ x = y \quad &\Rightarrow \quad f(0) = x^2 - 2xf(x) + f(x)^2 = (f(x) - x)^2 && (4) \end{aligned}$$

Wir geben zwei Lösungen, die eine benützt Gleichung (2), die andere (3) und (4).

1. Lösung:

Da jede nichtnegative Zahl von der Form x^2 ist, folgt aus (2) sofort

$$f(x) = x + f(0)^2 \quad \forall x \geq 0. \tag{5}$$

Sei nun $z > 0$. Setze in der ursprünglichen Gleichung $x = -z$ und $y = z$, dann folgt $f(4z^2) = z^2 - 2zf(-z) + f(z)^2$. Nach (5) ist ausserdem $f(4z^2) = 4z^2 + f(0)^2$ und $f(z) = z + f(0)^2$. Setzt man dies ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} 2zf(-z) &= z^2 + f(z)^2 - f(4z^2)\\ &= z^2 + (z + f(0)^2)^2 - (4z^2 + f(0)^2)\\ &= 2z(-z + f(0)^2) + \underbrace{(f(0)^4 - f(0)^2)}_{=0} = 2z(-z + f(0)^2), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile noch (1) verwendet haben, quadrieren liefert nämlich $f(0)^2 = f(0)^4$. Wegen $z > 0$ können wir durch $2z$ teilen und erhalten $f(-z) = -z + f(0)^2$, also

$$f(x) = x + f(0)^2 \quad \forall x < 0. \tag{6}$$

Schliesslich folgt aus (1) noch $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$, mit (5) und (6) ergeben sich damit die zwei Funktionen

$$f(x) = x \quad \text{und} \quad f(x) = x + 1.$$

Durch Einsetzen bestätigt man leicht, dass beides tatsächlich Lösungen sind.

2. Lösung:

Aus (1) folgt $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$, wir unterscheiden diese zwei Fälle.

1. Fall $f(0) = 0$
Aus (4) folgt $(f(x) - x)^2 = 0$, also

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Fall $f(0) = 1$
Aus (4) folgt $(f(x) - x)^2 = 1$, also

$$f(x) = x \pm 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Nehme an, es existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) = b - 1$. Setze in (3) $y = b$, dann folgt

$$f(b^2) = -2bf(0) + f(b)^2 = -2b + (b-1)^2 = b^2 + (1 - 4b).$$

Ausserdem ist ja wegen (7) auch $f(b^2) = b^2 \pm 1$, also $(1 - 4b) = \pm 1$. Dies führt zu $b = 0$ oder $b = 1/2$. Ersteres ist nicht möglich, da $f(0) \neq -1$. Das zweite ist aber ebenfalls unmöglich, denn dann wäre $b = 1/2$ die einzige reelle Zahl mit $f(b) = b - 1$. Setzt man aber in (3) $y = 1/2$, dann folgt $f(1/4) = 1/4 - 1$, Widerspruch. Folglich gilt in diesem Fall

$$f(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen bestätigt, dass die beiden gefundenen Funktionen tatsächlich Lösungen sind.

Bemerkungen und Punkteschema:

Die erste Lösung ist in dieser Form wohl nicht allzu naheliegend, einige werden eine ähnliche Lösung gefunden haben, jedoch auch die Fallunterscheidung für $f(0)$ gemacht haben. Die zweite Lösung ist vielleicht naheliegender, da wir ein ähnliches Vorgehen am Vorbereitungstreffen in Bern gesehen haben. Der Fall $f(0) = 1$ kann auf viele andere Arten vervollständigt werden, als jene oben. Natürlich sind auch Kombinationen dieser zwei Lösungen sowie andere Ansätze möglich, was die Punkteverteilung etwas schwierig macht. Wir werden die Punkte der jeweiligen Lösung anpassen, halten uns aber weitestgehend an die folgenden Schemen:

1. Lösung, wobei wir annehmen, dass eine Fallunterscheidung für $f(0)$ gemacht wurde: Da beide Fälle völlig analog gelöst werden können, gibt es einfach für den ersten erledigten Fall 4 Punkte, für den zweiten weitere 3 Punkte. Der Grund dafür ist, dass man nach dem ersten gelösten Fall bereits das ganze Know-How für den zweiten zusammen hat. Folgende Teilschritte geben dabei Punkte:
Gleichung (5): 1 Punkt,
Gleichungen (5) und (6): 4 Punkte.

2. Lösung
Erkennen des Binoms in Gleichung (4): 1 Punkt,
Nun gibt es für die beiden Fälle *zusätzliche* Teilpunkte wie folgt:
$f(0) = 0$ Fall vollständig: 1 Punkt.
Im Fall $f(0) = 1$ Gleichung (7): 1 Punkt,
Im Fall $f(0) = 1$ die einschränkende Gleichung $b = 1/2$ oder $b = 0$ (oder etwas analoges): 3 Punkte.

Eine vollständige Lösung ohne Einsetzkontrolle, ob die gefundenen Funktionen tatsächlich Lösungen sind: 6 Punkte.

4. Betrachte eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten. Auf wieviele Arten kann diese Tabelle mit lauter Nullen und Einsen ausgefüllt werden, sodass in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Anzahl Einsen stehen?

1. Lösung:

Nenne eine Tabelle, die die Forderungen der Aufgabe erfüllt, *zulässig*. Wir zeigen zuerst, dass eine zulässige Tabelle durch die Einträge in der oberen linken $m-1 \times n-1$ Tabelle bereits eindeutig bestimmt ist. Denn die Einträge in der letzten Spalte, ausgenommen das Feld unten rechts, müssen 0 oder 1 sein, je nachdem, ob in der entsprechenden Zeile bereits eine gerade oder eine ungerade Anzahl Einsen stehen. Nun sind die Einträge in der untersten Zeile ebenfalls bestimmt, denn sie sind 0 oder 1, je nachdem, ob in der entsprechenden Spalte bereits eine gerade oder eine ungerade Anzahl Einsen stehen.
Jetzt zeigen wir, dass jede $m-1 \times n-1$ Tabelle durch hinzufügen einer weiteren Spalte rechts und einer weiteren Zeile unten zu einer zulässigen Tabelle vervollständigt werden kann. Dies kann dann nach obigen Ausführungen auf genau eine Art geschehen. Dazu gehen wir wie folgt vor: schreibe in jedes Feld der letzten Spalte ausser jenem unten rechts eine 0 oder 1, sodass die Zahl Einsen in der entsprechenden Zeile gerade ist. Verfahre analog mit den Feldern der untersten Zeile ausser jenem unten rechts. Stehen nun in der letzten Spalte und der untersten Zeile entweder zweimal ein gerade

oder zweimal eine ungerade Anzahl Einsen, dann schreibe ins Feld unten rechts eine 0 bzw. eine 1. Die so konstruierte Tabelle ist dann offensichtlich zulässig. Dies können wir aber immer machen, denn es gilt:

$$\begin{array}{ll} & \text{Die Anzahl Einsen in der letzten Spalte ist ungerade.} \\ \iff & \text{Die Anzahl Zeilen mit einer ungeraden Anzahl Einsen in der oberen} \\ & \text{linken } m-1 \times n-1 \text{ Tabelle ist ungerade.} \\ \iff & \text{Die Anzahl Einsen in dieser } m-1 \times n-1 \text{ Tabelle ist ungerade} \\ \iff & \text{Die Anzahl Spalten mit einer ungeraden Anzahl Einsen in dieser} \\ & m-1 \times n-1 \text{ Tabelle ist ungerade.} \\ \iff & \text{Die Anzahl Einsen in der untersten Zeile ist ungerade.} \end{array}$$

Nun können wir die obere linke $m-1 \times n-1$ Tabelle auf genau $2^{(m-1)(n-1)}$ Arten mit Nullen und Einsen füllen, und jede solche Tabelle lässt sich auf genau eine Art zu einer zulässigen Tabelle vervollständigen. Daher ist die Lösung der Aufgabe

$$2^{(m-1)(n-1)}.$$

2. Lösung:

Wir füllen die Tabelle zeilenweise. Es gibt genau 2^{n-1} Möglichkeiten eine Zeile der Länge n mit Nullen und Einsen zu füllen, sodass eine gerade Zahl Einsen in dieser Zeile stehen. Wir geben zwei Begründungen.
Erstens: Fülle die ersten $n-1$ Felder beliebig, dann muss im letzten Feld eine Null oder Eins stehen, je nachdem, ob die Anzahl Einsen in den ersten $n-1$ Feldern gerade ist oder nicht. Dies geht auf 2^{n-1} Arten.
Zweitens: Es gibt genau $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots$ Möglichkeiten, eine gerade Anzahl Einsen zu verwenden. Dies ist gleich 2^{n-1}, wie man durch Addition der beiden Formeln

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{(n-k)} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots \\ 0 = (1-1)^n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{(n-k)} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \ldots \end{aligned}$$

und Halbieren des Ergebnisses sieht.
Fülle nun die ersten $m-1$ Zeilen in dieser Weise, dies geht auf $(2^{n-1})^{m-1} = 2^{(m-1)(n-1)}$ verschiedene Arten. Wir zeigen jetzt, dass jede solche $m-1 \times n$ Tabelle auf genau eine Weise durch Hinzufügen einer weiteren Zeile zu einer zulässigen $m \times n$ Tabelle vervollständigt werden kann.
Offensichtlich ist die unterste Zeile bereits bestimmt durch die Forderung, dass alle Spalten eine gerade Zahl Einsen enthalten soll, die Vervollständigung kann daher auf höchstens eine Weise geschehen. Andererseits können wir die Felder der untersten Zeile

entsprechend mit 0 oder 1, füllen, je nachdem, ob die Spalte dieses Feldes bereits ein gerade oder eine ungerade Anzahl Einsen enthält. Um zu zeigen, dass die so konstruierte $m \times n$ Tabelle zulässig ist, müssen wir lediglich noch zeigen, dass die Anzahl Einsen in der untersten Zeile gerade ist. Betrachte dazu die äquivalenten Aussagen

	Die Anzahl Einsen in der letzten Zeile ist gerade.
$\Longleftrightarrow$	Die Anzahl Spalten mit einer ungeraden Anzahl Einsen in der oberen $m-1 \times n$ Tabelle ist gerade.
$\Longleftrightarrow$	Die Anzahl Einsen in dieser $m-1 \times n$ Tabelle ist gerade.

Letzteres ist aber richtig, da jede Zeile der oberen $m-1\times n$ Tabelle nach Konstruktion eine gerade Anzahl Einsen enthält.
Folglich ist die Anzahl zulässiger Tabellen gleich

$$2^{(m-1)(n-1)}.$$

Bemerkungen und Punkteschema:

Hier unterscheiden sich die Bewertungen für die beiden Lösungen nur unwesentlich: Eine erkennbare Strategie und Zielsetzung im Rahmen der *1. Lösung* (ich betrachte die $m-1\times n-1$ Tabelle und versuche sie zu vervollständigen, usw.) ist 2 Punkte wert. Dasselbe im Rahmen der *2. Lösung* nur 1 Punkt. Dafür gibt es einen weiteren Punkt, wenn man die Anzahl Möglichkeiten, eine Zeile mit einer geraden Anzahl Einsen zu füllen, korrekt berechnet. Die folgenden Punkte werden *zusätzlich* verteilt, für die jeweiligen Aussagen in den beiden Beweisen:
Eindeutigkeit (ich kann auf höchstens eine Art vervollständigen): 1 Punkt,
Existenz (ich kann immer auf mindestens eine Art vervollständigen): 3 Punkte.

5. Beweise für positive reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ die folgende Ungleichung:

$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2$$

Lösung:

Es gibt sehr viele Wege, diese Ungleichung zu beweisen. Wir geben 10 verschiedene Lösungen als Auswahl. Wir verwenden folgende Abkürzungen:
HM, GM, AM, QM: harmonisches, geometrisches, arithmetisches, quadratisches Mittel.
C.S.: Ungleichung von Cauchy-Schwarz.
Setze

$$A = \frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y}.$$

erste Lösung
Zuerst C.S., dann AM-QM:

$$\begin{aligned} A = A \cdot 1 &= \left(\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y}\right)(x+y+z) \\ &\geq (\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2})^2 \\ &\geq \left(\sqrt{2} \cdot \frac{x+y}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{y+z}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{z+x}{2}\right)^2 \\ &= (\sqrt{2} \cdot (x+y+z))^2 = 2. \end{aligned}$$

zweite Lösung

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{y} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{z} + \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{z^2}{y} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{z}\right) \\ &\geq x + x + y + y + z + z = 2, \end{aligned}$$

wenn man AM-GM auf jeden Summanden anwendet.

dritte Lösung
Brute Force

$$\begin{aligned} A \geq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2(x+y+z) \\ &\Leftrightarrow \quad x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y \geq 2(x^2yz + y^2zx + z^2xy) \end{aligned}$$

Letzteres folgt aus AM-GM, indem man die Ungleichung

$$\frac{x^3y + x^3z + y^3x + z^3x}{4} \geq \sqrt[4]{x^8y^4z^4} = x^2yz$$

sowie die dazu analogen aufsummiert (das ist nichts anderes als Bunching, für all jene, die damit vertraut sind).

vierte Lösung
AM-QM ergibt

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 - z^2 = \frac{1}{3} - z^2.$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{\frac{1}{3}-z^2}{z}+\frac{\frac{1}{3}-x^2}{x}+\frac{\frac{1}{3}-y^2}{y} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-(x+y+z) \\ &\geq \frac{3}{x+y+z}-(x+y+z)=3-1=2, \end{aligned}$$

wenn man noch AM-HM benützt.

fünfte Lösung
AM-QM ergibt

$$\frac{x^2+y^2}{z} \geq \frac{2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{z}=\frac{(x+y)^2}{2z}=\frac{(1-z)^2}{2z}=\frac{1}{2z}-1+\frac{z}{2}.$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}-3+\frac{x+y+z}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{5}{2} \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{9}{x+y+z}-\frac{5}{2}=2. \end{aligned}$$

wenn man noch AM-HM benützt.

sechste Lösung
Die Folgen $(x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$ und $(1/z, 1/x, 1/y)$ sind gleich geordnet, also folgt mit Tschebyschef

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{3}(x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2+2(x^2+y^2+z^2))\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \\ &\geq \frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\frac{3}{x+y+z} \\ &= \frac{2}{3}(x+y+z)^2\frac{3}{x+y+z}=2, \end{aligned}$$

wobei der erste Faktor in der zweiten Zeile mit AM-GM oder dem Hauptsatz oder C.S. (oder Bunching) und der zweite Faktor mit AM-HM abgeschätzt wird.

siebte Lösung
Die Folgen $(x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$ und $(1/z, 1/x, 1/y)$ sind gleich geordnet, also folgt

mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{x^2+y^2}{x}+\frac{y^2+z^2}{y}+\frac{z^2+x^2}{z}=x+y+z+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z} \\ &= 1+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}, \end{aligned}$$

sowie analog

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{x^2+y^2}{y}+\frac{y^2+z^2}{z}+\frac{z^2+x^2}{x}=x+y+z+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \\ &= 1+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}. \end{aligned}$$

Addieren ergibt $2A \geq 2+A$, also $A \geq 2$.

achte Lösung
Anwenden von AM-GM auf jeden Summanden ergibt

$$A \geq \frac{2xy}{z}+\frac{2yz}{x}+\frac{2zx}{y}.$$

Die Folgen $(2xy, 2yz, 2zx)$ und $(1/z, 1/x, 1/y)$ sind gleich geordnet, also folgt mit dem Hauptsatz

$$A \geq \frac{2xy}{x}+\frac{2yz}{y}+\frac{2zx}{z}=2(x+y+z)=2.$$

neunte Lösung
Setze $s=x^2+y^2+z^2$, dann folgt leicht mit AM-QM oder C.S. $s \geq (x+y+z)^2/3=1/3$. Ausserdem ist

$$A=\frac{s-z^2}{z}+\frac{s-x^2}{x}+\frac{s-y^2}{y}.$$

Die Funktion $f(x)=\frac{s-x^2}{x}$ ist konvex für $0<x<s$, also folgt mit Jensen

$$\begin{aligned} A &= 3\left(\frac{1}{3}f(x)+\frac{1}{3}f(y)+\frac{1}{3}f(z)\right) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \\ &= 3f\left(\frac{1}{3}\right)=9s-1 \geq 2. \end{aligned}$$

zehnte Lösung
Setze $s=x^2+y^2+z^2$, dann ist

$$\begin{aligned} A &= \frac{s-z^2}{z}+\frac{s-x^2}{x}+\frac{s-y^2}{y}=s\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-(x+y+z) \\ &= (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-1. \end{aligned}$$

Die Folgen (x^2, y^2, z^2) und $(1/x, 1/y, 1/z)$ sind gegensätzlich geordnet, also folgt mit Tschebyschef

$$A \geq 3\left(\frac{x^2}{x} + \frac{y^2}{y} + \frac{y^2}{y}\right) - 1 = 3/(x + y + z) - 1 = 2.$$

Bemerkungen und Punkteschema:

Hier ist eine gerechte Bewertung besonders schwierig, da fast alle Manipulationen zu einer Lösung vervollständigt werden können. Wird die Ungleichung nicht vollständig bewiesen, geben wir daher 1 bis 2 Punkte für eine sinnvolle Manipulation, Abschätzung, Umformung, etc. der Ungleichung, je nach Qualität derselben. Weitere Teilpunkte gibt es nicht.