IMO Selektion 2002 Lösungen

1. Gegeben sind 24 Punkte im Raum. Je drei dieser Punkte spannen eine Ebene auf, und es ist bekannt, dass die 24 Punkte auf diese Weise genau 2002 verschiedene Ebenen aufspannen. Beweise, dass eine dieser Ebenen mindestens 6 der Punkte enthält.

Lösung

Nehme an, keine der Ebenen enthalte 6 oder mehr Punkte. Sei m die Anzahl Ebenen mit genau 4 Punkten und n die Anzahl Ebenen mit genau 5 Punkten. Wir zählen jetzt die Anzahl Ebenen auf zwei Arten:

(a) Nach Vorraussetzung sind es genau 2002.

(b) Wir zählen die Ebenen via Punktetripel. Es gibt $\binom{24}{3} = 2024$ Punktetripel. Jedes Tripel spannt eine Ebene auf. Jede der m Ebenen mit genau 4 Punkten wird dabei von $\binom{4}{3} = 4$ Tripeln aufgespannt, also 3 mal zuviel gezählt, jede der n Ebenen mit genau 5 Punkten wird von $\binom{5}{3} = 10$ Tripeln aufgespannt, also 9 mal zuviel gezählt. Es sind daher insgesamt $2024 - 3m - 9n$ Ebenen.

Durch Vergleich der Resultate erhalten wir die Gleichung $22 = 3m + 9n$. Diese besitzt aber keine Lösung, da die rechte Seite durch 3 teilbar ist, nicht aber die linke, Widerspruch. Die Annahme war also falsch: Es gibt eine Ebene, die mindestens 6 Punkte enthält.

2. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ und ein Punkt O in dessen Innern, sodass $\sphericalangle AOB + \sphericalangle DOC = \pi$. Zeige dass gilt

$$\sphericalangle CBO = \sphericalangle CDO$$

Lösung

Konstruiere den Punkt Q auf der anderen Seite von CD wie O, sodass $CQ \parallel BO$ und $DQ \parallel AO$. Nun gilt $\sphericalangle DQC = \sphericalangle AOB = \pi - \sphericalangle DOC$ und damit ist $CODQ$ ein Sehnenviereck. Da $BCQO$ ein Parallelogramm ist, gilt $\sphericalangle CBO = \sphericalangle CQO$. Da $CODQ$ ein Sehnenviereck ist, gilt nun $\sphericalangle CDO = \sphericalangle CQO = \sphericalangle CBO$.

3. n sei eine positive ganze Zahl mit mindestens vier verschiedenen positiven Teilern. Die vier kleinsten unter diesen Teilern seien d_1, d_2, d_3, d_4. Finde alle solchen Zahlen n, für die gilt

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

Lösung

Es ist $d_1 = 1$. Nehme an, n sei ungerade, dann wären auch d_1, d_2, d_3, d_4 ungerade und daher $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ gerade, Widerspruch. Also ist n gerade und $d_2 = 2$. Nehme an, n sei durch 4 teilbar, dann ist eine der Zahlen d_3, d_4 gleich 4 und die andere gleich a, wobei a irgend eine natürliche Zahl ist. Nun sind 0 und 1 die einzigen quadratischen Reste mod 4, daher gilt modulo 4

$$0 \equiv n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + a^2 \equiv 1 + a^2 \equiv 1, 2,$$

Widerspruch. Daher ist n nicht durch 4 teilbar und damit $d_3 = p$ eine ungerade Primzahl. Für d_4 bleiben die Möglichkeiten $d_4 = 2p$ oder $d_4 = q$ mit einer ungeraden Primzahl $q > p$. Nehme an, letzteres sei der Fall, dann gilt modulo 4

$$2 \equiv n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 1^2 + 2^2 + p^2 + q^2 \equiv 1 + 0 + 1 + 1 \equiv 3,$$

Widerspruch. Daher ist $d_4 = 2p$ und $n = 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5(1 + p^2)$. Nun ist p ein Teiler von n und ausserdem teilerfremd zu $1 + p^2$. Daher muss p ein Teiler von 5, also gleich 5 sein. Die einzige Lösung ist somit $n = 130$.

4. Betrachte ein 7×7 Feld, das in 49 Einheitsquadrate unterteilt ist. In dieses Feld wollen wir Kacheln der Form eines Schweizerkreuzes, bestehend aus 5 Einheitsquadraten, hineinlegen. Dabei sollen die Kanten der Kreuze auf den Linien des Feldes zu liegen kommen. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl Quadrate, die auf dem Feld markiert werden müssen, damit jedes Kreuz, egal wo es auf das Feld gelegt wird, mindestens ein markiertes Quadrat bedeckt.

Lösung

Führe Koordinaten ein. Es ist leicht zu sehen, dass jedes Kreuz eines der 7 Quadrate

$$(2,5), (3,2), (3,3), (4,6), (5,4), (6,2), (6,5)$$

bedeckt. Dies zeigt, dass 7 Markierungen genügen. Wir zeigen nun, dass 7 Markierungen nötig sind. Nehme an, nicht. Die Kreuze mit Mittelpunkten

$$(2,2), (2,6), (3,4), (5,2), (5,6), (6,4) \tag{1}$$

sind disjunkt, daher muss jedes dieser Kreuze ein markiertes Feld bedecken. Daher genügen fünf Markierungen nicht. Nehme an, genau 6 Quadrate sind markiert. Dann bedeckt jedes der 6 Kreuze in (1) *genau* eine Markierung. Daher können die Quadrate $(1,1),(1,3),(1,4)$ und $(1,6)$ nicht markiert sein. Durch Drehen und Spiegeln der Kreuzanordnung (1) und analogen Argumenten folgt, dass kein Quadrat am Rand des Feldes markiert sein kann. Genauso folgt, dass die Quadrate $(3,4),(4,3),(4,5)$ und $(6,4)$ nicht markiert sein können. Folglich ist $(4,4)$ markiert. Die 5 Kreuze mit Mittelpunkten

$$(2,6),(3,3),(5,2),(5,6),(6,4) \tag{2}$$

sind disjukt und keines enthält das zentrale Quadrat. Daher bedeckt jedes ein markiertes Quadrat und insbesondere können die Quadrate $(2,2),(2,4)$ und $(3,5)$ nicht markiert sein. Ersetzt man in (2) das Kreuz $(3,3)$ durch $(2,3)$, sieht man analog, dass die Quadrate $(3,2)$ und $(3,4)$ nicht markiert sein können. Aus Symmetriegründen folgt nun wie vorher, dass kein einziges Quadrat ausser $(4,4)$ markiert sein kann, Widerspruch.

5. Bestimme alle Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $f(x-1-f(x)) = f(x)-1-x$ für alle $x\in\mathbb{R}$,

(b) Die Menge $\{f(x)/x \mid x\in\mathbb{R},\ x\neq 0\}$ ist endlich.

Lösung

Wir zeigen, dass $f(x)=x$ die einzige Lösung ist. Setze $g(x)=f(x)-x$. Substituiert man $f(x)=g(x)+x$ in (a), folgt für g die einfachere Gleichung

$$g(-1-g(x)) = 2g(x). \tag{3}$$

Wegen $f(x)/x = (g(x)+x)/x = g(x)/x+1$ und (b) folgt, dass auch die Menge $\{g(x)/x \mid x\in\mathbb{R},\ x\neq 0\}$ endlich ist. Setze $A=\{x\in\mathbb{R};\mid x\neq 0,\ g(x)\neq -1\}$. Für $x\in A$ können wir (3) durch $-1-g(x)$ dividieren und erhalten

$$\frac{g(-1-g(x))}{-1-g(x)} = \frac{-2g(x)}{g(x)+1} = h(g(x)), \tag{4}$$

wobei $h(x)=-2x/(x+1)$. Die linke Seite dieser Gleichung nimmt nur endlich viele Werte an, also auch die rechte. Nun ist die Funktion $h:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ bijektiv mit Umkehrfunktion $h^{-1}(x)=-x/(x+2)$. Daher nimmt auch $g(x)$ für $x\in A$ nur endlich viele Werte an. Nach Definition von A bedeutet das aber, dass $g(x)$ überhaupt nur endlich viele Werte annehmen kann. Daraus folgt jetzt unmittelbar $g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ und wir sind fertig. Nehme an, dies sei nicht der Fall und sei $a=g(c)\neq 0$ der betragsmässig grösste Wert, den g annimmt. Setze $x=c$ in (3), dann folgt $g(-1-a)=2a$, im Widerspruch zur Maximalität von a.

6. Sei $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine Folge ganzer Zahlen mit den Eigenschaften

- $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots,$
- $x_{n+1} \leq 2n \quad$ für $\quad n \geq 1.$

Zeige, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl k zwei Indizes i und j gibt mit $k = x_i - x_j$.

Lösung

Sei k beliebig. Betrachte die k Schubfächer

$$\{1, k+1\},\ \{2, k+2\},\ \ldots,\ \{k, 2k\}.$$

Nach Voraussetzung liegen die $k+1$ Folgeglieder $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ alle in einem der Schubfächer und damit liegen zwei im gleichen. Diese beiden Folgeglieder können nicht gleich sein, also müssen sie Differenz k haben.

7. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt in dessen Innern. X, Y und Z seien die Fusspunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA und AB. Zeige dass die Summe der Flächen der Dreiecke BXP, CYP und AZP nicht von P abhängt.

Lösung

Schraffiere die Dreiecke BXP, CYP und AZP. Zeichne die drei gleichseitigen Dreiecke, die P als Ecke haben und deren gegenüberliegende Seite auf einer der Seiten von ABC liegt. Durch diese drei gleichseitigen Dreiecke wird ABC in drei Dreiecke und drei Parallelogramme zerlegt, die offenbar alle zur Hälfte schraffiert sind. Damit ist die Summe der schraffierten Dreiecke genau die Hälfte der Fläche von ABC.

8. In einer Gruppe von n Leuten veranstaltet jedes Wochenende jemand eine Party, an der er alle seine Bekannten einander gegenseitig vorstellt. Nachdem jeder der n Leute einmal eine Party gemacht hat, gibt es immer noch zwei Personen unter ihnen, die sich nicht kennen. Zeige, dass diese zwei sich auch in Zukunft nie an einer dieser Partys kennen lernen werden. (Zwei Leute kennen sich immer gegenseitig oder gegenseitig nicht)

Lösung

Betrachte einen Graph, dessen Ecken die n Leute sind, und verbinde zwei Leute mit einer Kante, wenn sie sich kennen. Immer wenn jemand eine Party macht, verändert

sich dieser Graph. Nehme an A macht eine Party, dann werden alle direkt mit A verbundenen Ecken gegenseitig verbunden.
Wir zeigen nun, dass alle Zusammenhangskomponenten (ZK) des Graphen vollständig sind, nachdem jeder einmal eine Party gemacht hat. Seien B und C zwei Punkte in derselben ZK, dann gibt es einen kürzesten Weg $BP_1P_2\ldots P_kC$ von B nach C. Jedesmal wenn eine der Personen P_i eine Party macht, stellt er die beiden benachbarten Leute auf dem Weg einander vor, der kürzeste Weg verkürzt sich dabei um 1. Da jede Person auf dem Weg einmal eine Party macht, müssen B und C am Schluss mit einer Kante verbunden sein.
Als nächstes Zeigen wir, dass zwei Punkte in verschiedenen ZK nie verbunden werden. Nehme an, B und C liegen anfangs in verschiedenen ZK und sind nach der k-ten Party das erste Mal in der gleichen. Wenn P diese k-te Party veranstaltet, dann muss P vorher mit B und C verbunden sein. Dann gibt es aber schon vor der k-ten Party einen Weg von B nach C, diese Punkte liegen also bereits jetzt in derselben ZK, im Widerspruch zur minimalen Wahl von k.
Wenn sich nun zwei Leute nicht kennen, nachdem jeder eine Party gemacht hat, dann befanden sie sich am Anfang in verschiedenen ZK, und dies bleibt auch immer so. Diese Leute werden sich also auch in Zukunft nie kennen lernen.

9. Beweise für jede positive reelle Zahl a und jedes ganze $n \geq 1$ die Ungleichung

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2 \left(a + \frac{1}{a} - 2 \right),$$

und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung

Multiplikation mit a^n und Anwenden der Binomischen Formeln ergibt die äquivalente Ungleichung

$$(a^n - 1)^2 \geq n^2 a^{n-1} (a-1)^2.$$

Nach AM-GM gilt nun aber

$$\begin{aligned} (a^n - 1)^2 &= (a-1)^2 (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})^2 \\ &\geq (a-1)^2 \left(n \cdot \sqrt[n]{1 \cdot a \cdot a^2 \cdots a^{n-1}} \right)^2 \\ &= n^2 (a-1)^2 \left(\sqrt[n]{a^{(n-1)n/2}} \right)^2 \\ &= n^2 (a-1)^2 a^{n-1}. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $n = 1$ oder wenn $a = 1$.

10. m sei eine beliebige natürliche Zahl. Bestimme in Abhängigkeit von m die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt: Ist $\{m, m+1, ..., k\} = A \cup B$ eine beliebige Zerlegung in zwei Mengen A und B, dann enthält A oder B drei Elemente a, b, c (die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen) mit $a^b = c$.

Lösung

Antwort: $k = m^{m^{m+2}}$

Wir zeigen zuerst, dass man $\{m, m+1, ..., m^{m^{m+2}} - 1\}$ in zwei Mengen zerlegen kann, sodass es keine drei Elemente a, b, c gibt, wie in der Aufgabe gefordert. Setze

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2 = \{m, \ldots, m^m - 1\} \cup \{m^{m^{m+1}}, \ldots, m^{m^{m+2}} - 1\}, \\ B &= \{m^m, \ldots, m^{m^{m+1}} - 1\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt verschiedene Fälle:

1. $a, b \in A_1$. Dann ist $a^b \geq m^m$ und $a^b < (m^m)^{m^m} = m^{m^{m+1}}$, also liegt a^b in B und daher nicht in A.
2. $a \in A_2$, $b \in A_1$. Es gilt $a^b \geq \left(m^{m^{m+1}}\right)^m = m^{m^{m+2}}$, und a^b liegt nicht in A.
3. $a \in A$, $b \in A_2$. In diesem Fall gilt $a^b \geq m^{(m^{m^{m+1}})} \geq m^{m^{m+2}}$, also liegt a^b nicht in A.
4. $a, b \in B$. Dann gilt $a^b \geq (m^m)^{m^m} = m^{m^{m+1}}$ und daher liegt a^b nicht in B.

Nun zeigen wir, dass es für $k \geq m^{m^{m+2}}$ stets drei Elemente a, b, c in A oder B gibt, sodass $a^b = c$. Nehme an, dies sei falsch und es existiert eine Zerlegung $\{m, m+1, ..., m^{m^{m+2}}\} = A \cup B$, sodass weder A noch B drei Elemente mit den geforderten Eigenschaften enthält. Wir können oBdA annehmen, dass $m \in A$. Dann muss m^m in B liegen und damit $(m^m)^{m^m} = m^{m^{m+1}}$ in A. Dann liegt $\left(m^{m^{m+1}}\right)^m = m^{m^{m+2}}$ aber wiederum in B.

1. Liegt m^{m+1} in A, dann gilt $a^b = c$ mit $a = m$, $b = m^{m+1}$ und $c = m^{m^{m+1}}$, im Widerspruch zu unserer Annahme.
2. Liegt m^{m+1} in B, dann gilt $a^b = c$ mit $a = m^m$, $b = m^{m+1}$ und $c = m^{m^{m+2}}$, dies ist wieder ein Widerspruch zur Annahme.