IMO-qualification suisse 2002

Premier test - 10 mai 2002

Durée: 3.5 heures
Chaque problème vaut 7 points.

1. Soient 24 points dans l'espace, dont il y a pas 3 colinéaires. Chaque 3 points forment un plan, et c'est connu que ainsi exactement 2002 plans sont formés. A prouver qu'il existe un plan contenant au moins 6 de points.

2. O soit un point à l'intérieur du parallelogramme $ABCD$, tel que $\sphericalangle AOB + \sphericalangle DOC = \pi$. A montrer que:
$$\sphericalangle CBO = \sphericalangle CDO$$

3. n soit un nombre positif entier qui a au moins quatre diviseurs positifs distincts, dont les quatre les plus petits soient d_1, d_2, d_3, d_4. Trouve tous les nombres n, tels que
$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

4. Considère un champ carré divisé par des lignes horizontales verticales en 7×7 carrés d'unité. Dans ce champ on veut mettre des Croix de Suisse (consistant d'un carré au centre et un carré attaché aux quatre côtés du carré central) de la manière que les bords des croix soient allignés aux lignes divisant le champ. Détérmine le nombre minimal de carrés qu'il faut marquer de sorte que chaque Croix, n'importe où elle est placée sur le camp, couvre au moins un carré marqué.

5. Détérmine toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour lesquelles:
   (a) l'ensemble $\{\frac{f(x)}{x} | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ est fini et
   (b) $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - 1 - x$ pour tous les $x \in \mathbb{R}$.

Bonne chance!

IMO-qualification suisse 2002

Second test - 25 mai 2002

Durée: 3.5 heures
Chaque problème vaut 7 points.

1. Soit $x_1, x_2, x_3, ...$ une suite des entiers avec les propriétés suivantes:
   - $1 = x_1 < x_2 < x_3 < ...$
   - $x_{n+1} \leq 2n$ pour $n = 1, 2, 3, ...$

   Montre qu'ils existent pour chaque nombre entier positive k deux indices i et j tels que $k = x_i - x_j$.

2. Soit ABC un triangle équilateral et P un point à l'intérieur. Soient X, Y et Z les projections de P sur les côtés BC, CA et AB. Montre que la somme des surfaces des triangles BXP, CYP et AZP ne dépendend pas de P.

3. Dans un groupe de n personnes, il y a chaque week-end quelqu'un qui organise une fête où il présente ceux qu'il connaît entre eux. Après que chacun des n personnes ait organisé une fête, il y en a toujours deux qui ne se connaissent pas.
   Montre que ces deux personnes ne vont jamais faire la connaissance de l'autre à une fête pareille.
   (Deux personnes se connaissent mutuellement ou ne se connaissent pas mutuellement)

4. Montre l'inégalité suivante pour des nombres reels a et chaque $n \geq 1$ entier:
$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2(a + \frac{1}{a} - 2)$$
   et détermine tous les cas d'égalité.

5. Soi m un nombre naturel. Détermine, en dépendance de m le plus petit nombre naturel k avec: Si $\{m, m+1, ..., k\} = A \cup B$ est une partition arbitraire en deux ensembles, A ou B eontient trois éléments a, b, c (pas nécessairement différents) tels que $a^b = c$.

Bonne chance!