IMO - Selektion 2001 Lösungen

1. In einem Park sind 2001×2001 Bäume in einem quadratischen Gitter angeordnet. Was ist die grösste Zahl an Bäumen, die man fällen kann, sodass kein Baumstrunk von einem anderen aus sichtbar ist?
(Die Bäume sollen Durchmesser 0 haben)

Lösung

Offensichtlich kann man die Bäume wie folgt in Gruppen von $1, 2$ oder 4 benachbarten Bäumen zusammenfassen:

- 1000^2 Gruppen der Form 2×2,
- Je 1000 Gruppen der Form 1×2 und 2×1,
- 1 einzelner Baum.

In jeder der insgesamt $1002001 = 1001^2$ Gruppen darf höchstens ein Baum gefällt werden, denn zwei Baumstrünke in derselben Gruppe sind gegenseitig sichtbar. Wir zeigen nun, dass man alle Bäume fällen kann, deren Zeilen- und Spaltennummer ungerade ist (das sind 1001^2 Stück). Die Lösung der Aufgabe lautet daher 1001^2. Betrachte dazu zwei beliebige Baumstrünke mit Koordinaten (a, b) und (c, d), wobei a, b, c, d ungerade sind. Sei $g > 0$ der grösste gemeinsame Teiler von $a - c$ und $b - d$ (diese Zahlen können auch negativ sein!) und schreibe $a - c = xg$ und $b - d = yg$. Nun sind x und y nach Konstruktion nicht beide gerade. Der Baum mit Koordinaten $(a + x, b + y)$ liegt im Innern der Verbindungsstrecke der Strünke (a, b) und (c, d) und wurde nicht gefällt, denn mindestens eine seiner Koordinaten ist gerade. Daher ist keiner der beiden Strünke vom andern aus sichtbar.

2. Seien a, b und c die Seiten eines Dreiecks. Beweise die Ungleichung

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung

Da a, b, c Seiten eines Dreiecks sind, existieren positive Zahlen x, y, z mit $a = x + y$, $b = y + z$ und $c = z + x$. Damit wird die Ungleichung zu

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$$

Nach AM-GM gilt nun

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y$. Addiert man diese und die beiden analogen Ungleichungen, ergibt sich das Gewünschte. Gleichheit gilt nur für $x = y = z$, also nur für $a = b = c$.

3. In einem konvexen Fünfeck ist jede Diagonale parallel zu einer Seite. Zeige, dass das Verhältnis zwischen den Längen der Diagonalen und der dazu parallelen Seite für alle Diagonalen dasselbe ist. Bestimme den Wert dieses Verhältnisses.

Lösung

Eine Diagonale kann nur zu einer Seite parallel sein, mit der sie keinen gemeinsamen Punkt hat. Es ist also für jede Diagonale eindeutig zu welcher Seite sie parallel ist. Wir führen nun einige Bezeichnungen ein

$$BD \cap CE = \{P\} \quad CE \cap DA = \{Q\} \quad DA \cap EB = \{R\}$$
$$EB \cap AC = \{S\} \quad AC \cap BD = \{T\} \quad .$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass $ABCQ$ und $ABPE$ beides Parallelogramme sind. Es gilt also $CQ = PE$ und $CP = QE$. Daraus folgt insbesondere $\frac{CP}{PE} = \frac{EQ}{QC}$. Analoge Beziehungen können wir für die vier anderen Diagonalen herleiten. Mit dem zweiten Strahlensatz (zuerst im Scheitelpunkt S, dann in R) erhalten wir

$$\frac{EC}{AB} = \frac{ES}{SB} = \frac{BR}{RE} = \frac{DB}{EA}.$$

Dieses Argument können wir analog für die weiteren Seitenverhältnisse wiederholen. Wir bezeichnen das gesuchte Verhältnis mit $v = \frac{EC}{AB}$. Es gilt nach dem zweiten Strahlensatz im Scheitelpunkt Q

$$v = \frac{EC}{AB} = \frac{AC}{ED} = \frac{CQ}{QE} = \frac{AB}{EC - AB} = \frac{1}{v-1}$$

Auflösen der quadratischen Gleichung nach v und Berücksichtigen, dass $v > 0$ gilt, liefert $v = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, t_2, \ldots, t_k$ verschiedene positive Teiler von n. Eine Identität der Form $n = t_1 + t_2 + \ldots + t_k$ heisst *Darstellung von n als Summe verschiedener Teiler*. Zwei solche Darstellungen gelten als gleich, wenn sie sich nur um die Reihenfolge der Summanden unterscheiden (zum Beispiel sind $20 = 10+5+4+1$ und $20 = 5+1+10+4$ zweimal die gleiche Darstellung von 20 als Summe verschiedener Teiler). Sei $a(n)$ die Anzahl verschiedener Darstellungen von n als Summe verschiedener Teiler. Zeige oder widerlege:

Es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ mit $a(n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Lösung

So ein M existiert nicht. Wir nennen eine Darstellung von n als Summe verschiedener Teiler im Folgenden kurz *Darstellung*. Wir zeigen nun, dass gilt

$$a(3 \cdot 2^n) \geq n.$$

Wegen $6 = 1 + 2 + 3$ ist $a(6) \geq 1$ und es genügt zu zeigen, dass gilt $a(3 \cdot 2^{n+1}) \geq a(3 \cdot 2^n) + 1$. Die Behauptung folgt dann induktiv.
Jede Darstellung $3 \cdot 2^n = t_1 + \ldots + t_k$ führt zu einer Darstellung $3 \cdot 2^{n+1} = 2t_1 + \ldots + 2t_k$. Dabei führen verschiedene Darstellungen von $3 \cdot 2^n$ offensichtlich zu verschiedenen Darstellungen von $3 \cdot 2^{n+1}$. Damit haben wir schon $a(3 \cdot 2^{n+1}) \geq a(3 \cdot 2^n)$. Die Behauptung

folgt nun, wenn wir eine weitere Darstellung von $3 \cdot 2^{n+1}$ finden, die nicht von dieser Form ist. Eine solche ist zum Beispiel

$$3 \cdot 2^{n+1} = 1 + 2 + (3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 3 \cdot 2^n).$$

2. Lösung

Das Argument aus der 1. Lösung funktioniert in der Tat viel allgemeiner. Wir zeigen, dass gilt $a(2n) \geq a(n) + 1$ für alle natürliche Zahlen n mit $a(n) \geq 2$. Dazu ordnen wir wie vorher jeder Darstellung $n = t_1 + \ldots + t_k$ von n die Darstellung $2n = 2t_1 + \ldots + 2t_k$ von $2n$ zu. Es genügt nun, eine weitere Darstellung von $2n$ anzugeben, die nicht von dieser Form ist. Wähle dazu eine Darstellung $n = t_1 + \ldots + t_k$ von n mit $t_1 < \ldots < t_k$ und t_1 minimal. Dann ist $t_k < n$ wegen $a(n) \geq 2$. Die gesuchte Darstellung lautet dann zum Beispiel

$$2n = t_1 + \ldots + t_k + n.$$

5. Sei $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ eine Folge positiver ganzer Zahlen mit der Eigenschaft, dass für $i < j$ die Dezimaldarstellung von a_j nicht mit jener von a_i beginnt (zum Beispiel können die Zahlen 137 und 13729 nicht beide in der Folge vorkommen). Beweise, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9}$$

Lösung

Für eine Folge $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ wie in der Aufgabenstellung setzen wir

$$s(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Enthält die Folge eine $k+1$-stellige Zahl $b = (d_k \ldots d_1 d_0)_{(10)}$, $k \geq 1$, dann kann sie nach Voraussetzung die k-stellige Zahl $(d_k \ldots d_1)_{(10)}$ nicht enthalten. Entferne jetzt alle Folgeglieder der Form $(d_k \ldots d_1 x)_{(10)}$ mit $0 \leq x \leq 9$ aus a (also mindestens eines, höchstens 10 Stück, je nachdem, welche in der Folge auftauchen) und füge die Zahl $(d_k \ldots d_1)_{(10)}$ hinzu. Dies ergibt eine neue Folge a'. Es gilt offensichtlich

$$\sum_{x=0}^{9} \frac{1}{(d_k \ldots d_1 x)_{(10)}} < 10 \cdot \sum_{x=0}^{9} \frac{1}{(d_k \ldots d_1 0)_{(10)}} = \frac{1}{(d_k \ldots d_1)_{(10)}},$$

und damit auch $s(a') > s(a)$. Diese Operation führen wir nun so lange aus, bis die Folge nur noch einstellige Zahlen enthält. Bei jeder dieser Operationen erhöht sich der Wert der Summe $s(a)$, und am Schluss ist sie höchstens gleich

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9},$$

dies war zu zeigen. Gleichheit gilt nur für die Folge $(1, 2, \ldots, 9)$.

6. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ habe die folgenden Eigenschaften:

(a) $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$

(b) $f(1) = 1$

(c) $f(x+y) \geq f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y, x+y \in [0,1]$

Beweise: $f(x) \leq 2x \quad \forall x \in [0,1]$

Lösung

Aus (a) und (c) folgt, dass f monoton steigend ist, denn für $0 \leq x \leq y \leq 1$ gilt $f(y) = f(x + (y-x)) \geq f(x) + f(y-x) \geq f(x) + 0 = f(x)$. Aus (b) und (c) erhält man $2f(1/2) \leq f(1) = 1$, also $f(1/2) \leq 1/2$. Genauso zeigt man $f(1/4) \leq 1/4$ und mit Induktion $f(1/2^n) \leq 1/2^n$ für alle $n \geq 0$.
Aus (c) folgt $2f(0) \leq f(0)$, also mit (a) $f(0) = 0$. Sei nun $x \in]0,1]$ beliebig. Wähle n so, dass gilt $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$. Mit der Monotonie von f ergibt sich nun

$$f(x) \leq f(1/2^n) \leq 1/2^n < 2x.$$

7. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. S sei der Kreis durch A, B und O. Die Geraden AC und BC schneiden S in den weiteren Punkten P und Q. Zeige $CO \perp PQ$.

Lösung

Sei R der Schnittpunkt von PQ und CO. Da $PQBA$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\sphericalangle RPC = \sphericalangle QPA = 180° - \sphericalangle ABQ = \beta$. Andererseits ist $\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle ABC = 2\beta$. Das Dreieck AOC ist gleichschenklig und daher gilt $\sphericalangle PCR = \sphericalangle ACO = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle AOC) = 90° - \beta$. Somit ist $\sphericalangle PRC = 90°$ und $CO \perp PQ$.
Für die korrekte Formulierung der Lösung dieser Aufgabe müssen mehrere Fälle behandelt werden, je nachdem ob P bzw. Q innerhalb oder ausserhalb des Umkreises liegen. Die Beweise für die verschiedenen Fälle sind sich aber alle sehr ähnlich.

8. Finde die zwei kleinsten natürlichen Zahlen n, sodass die Brüche

$$\frac{68}{n+70}, \frac{69}{n+71}, \frac{70}{n+72}, \ldots, \frac{133}{n+135}$$

alle irreduzibel sind.

Lösung

Die Brüche haben die Form $k/(k+n+2)$ für $68 \leq k \leq 133$. Wegen $\mathrm{ggT}(k, k+n+2) = \mathrm{ggT}(k, n+2)$ sind sie genau dann alle irreduzibel, wenn $n+2$ teilerfremd ist zu $68, \ldots, 133$. Also darf $n+2$ durch keine Primzahl p teilbar sein, die ein Teiler ist von mindestens einer der Zahlen $68, \ldots, 133$. Wegen $133 - 68 = 65$ fallen damit alle Primzahlen $p \leq 65$ als Teiler von $n+2$ weg, da diese mindestens eine der Zahlen $68, \ldots, 133$ teilen. Ausserdem kommen natürlich auch die Primzahlen $68 \leq p \leq 133$ nicht in Frage. Die beiden kleinsten Möglichkteiten für $n+2$ sind demnach $n+2 = 67$ und $n+2 = 137$, also $n = 65, 135$.

9. In Genf sind 16 Geheimagenten am Werk. Jeder Agent überwacht mindestens einen anderen Agenten, aber keine zwei Agenten überwachen sich gegenseitig. Nehme an, dass je 10 Agenten so nummeriert werden können, dass der erste den zweiten überwacht, der zweite den dritten usw. und der zehnte den ersten. Zeige, dass dann auch je 11 Agenten in dieser Art nummeriert werden können, dass jeder den nächsten überwacht.

Lösung

Jeder Agent A überwacht mindestens 7 andere Agenten. Nehme an, das sei nicht der Fall, dann gibt es mindestens 9 Agenten, die A nicht überwacht. Nach Voraussetzung lassen sich diese 9 Agenten zusammen mit A so nummerieren, dass jeder den nächsten überwacht. Insbesondere überwacht A mindestens einen der anderen 9 Angenten, Widerspruch. Analog zeigt man, dass A selbst von mindestens 7 Agenten überwacht wird. Da sich keine zwei Agenten gegenseitig überwachen, gibt es daher zu jedem der 16 Agenten höchstens einen anderen Agenten, sodass keiner dieser beiden den anderen überwacht (wir nennen die beiden dann ein *neutrales Paar*).
Wähle nun 11 beliebige Agenten $A_1, \ldots, A_{11}$. Einige dieser Agenten können zusammen neutrale Paare bilden, da aber jeder in höchstens einem neutralen Paar ist, sind diese disjunkt. Insbesondere ist eine gerade Zahl der Agenten in einem neutralen Paar. Da 11 ungerade ist, können wir daher annehmen, dass A_{11} mit keinem der anderen 10 Agenten ein neutrales Paar bildet. Nach Voraussetzung überwachen sich $A_1, \ldots, A_{10}$ reihum. Nach Umnummerierung können wir daher annehmen, dass $A_1 \to A_2 \to \ldots A_{10} \to A_1$ und $A_1 \to A_{11}$ (dabei bedeutet $X \to Y$, dass Y von X überwacht wird). Wähle nun $2 \leq k \leq 9$ minimal mit $A_{11} \to A_k$. Dann muss gelten $A_{k-1} \to A_{11}$ und die 11 Agenten überwachen sich in der Reihenfolge

$$A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{k-1} \to A_{11} \to A_k \to \ldots \to A_{10} \to A_1.$$

Damit ist alles gezeigt.

10. Zeige, dass jede 1000-elementige Teilmenge $M \subset \{0, 1, \ldots, 2001\}$ eine Zahl enthält, die eine Zweierpotenz ist, oder zwei verschiedene Zahlen, deren Summe eine Zweierpotenz ist.

Lösung

Wir können annehmen, dass M keine Zweierpotenz enthält (sonst ist alles klar). Wir ignorieren die Null und zeigen: Ist $M \subset \{1, \ldots, 2001\}$ eine Menge mit mindestens 999 Elementen, die keine Zweierpotenz enthält, dann gibt es zwei verschiedene Elemente in M, deren Summe eine Zweierpotenz ist. Betrachte folgende disjunkte Schubfächer:

$$\left.\begin{array}{c}\{2001,47\}\\ \{2000,48\}\\ \vdots\\ \{1025,1023\}\end{array}\right. \quad \text{977 Schubfächer, Summe } 2048 = 2^{12}$$

$$\left.\begin{array}{c}\{46,18\}\\ \{45,19\}\\ \vdots\\ \{33,31\}\end{array}\right. \quad \text{14 Schubfächer, Summe } 64 = 2^{6}$$

$$\{17,15\} \quad \text{1 Schubfach, Summe } 32 = 2^{5}$$

$$\left.\begin{array}{c}\{14,2\}\\ \{13,3\}\\ \vdots\\ \{9,7\}\end{array}\right. \quad \text{6 Schubfächer, Summe } 16 = 2^{4}$$

Dies sind insgesamt $977 + 14 + 1 + 6 = 998$ Schubfächer. Also liegen nach dem Schubfachprinzip zwei Elemente aus M im gleichen Schubfach. Ihre Summe ist eine Zweierpotenz.